

7. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

Aufgabe 1. Sei G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt ein Element $x \in G$ mit $o(x) = 4$. Dann ist $U := \langle x \rangle \trianglelefteq G$ mit $[G : U] = 2$.
- (b) Sei $y \in G \setminus \langle x \rangle$. Dann ist $y^2 \in U$ und es gilt $G = \langle x, y \rangle = \{1_G, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$, wobei
entweder $x^4 = 1_G, y^2 = 1_G, yx = x^3y$ oder $x^4 = 1_G, y^2 = x^2, yx = x^3y$.
- (c) Bestimmen Sie in beiden Fällen in (b) mit Hilfe der angegebenen Relationen jeweils die komplette Multiplikationstabelle. Folgern Sie, dass im ersten Fall $G \cong D_8$ gilt, im zweiten Fall $G \cong Q_8$.
- Zusammen mit den abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ folgt also, dass es bis auf Isomorphie genau 5 Gruppen der Ordnung 8 gibt.
- (d) Zu welcher dieser 5 Gruppen sind die 2-Sylow Untergruppen von S_5 isomorph? Und wieviele davon gibt es?

[Hinweis : Beispiel 10.2. im Skript.]

Bemerkung: Die Anzahl der Gruppen der Ordnung n (bis auf Isomorphie) steigt sehr unregelmäßig mit n an; insgesamt gibt es zum Beispiel 1048 Gruppen der Ordnung ≤ 100 . (Siehe GAP-Funktion `AllSmallGroups`.)

Aufgabe 2. (Schriftlich, 12 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Gruppen der Ordnung < 60 auflösbar sind.

Aufgabe 3. (a) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 42875$. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung 125 hat.

(b) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 255$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

(c) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 159$. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 4. (Schriftlich, 9 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq R$ eine Teilmenge. Das von S erzeugte Ideal ist definiert als $(S) := \bigcap_I I$, wobei der Durchschnitt über alle Ideale $I \trianglelefteq R$ mit $S \subseteq I$ läuft.

(a) Sei zuerst $S = \{a\}$ für ein $a \in R$. Zeigen Sie, dass $(S) = \{xa \mid x \in R\}$ gilt, also (S) ein Hauptideal ist (siehe Beispiel 2.5 der Vorlesung).

(b) Sei nun $S = \{a, b\}$ mit $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass $(S) = \{xa + yb \mid x, y \in R\}$ gilt.

(c) Sei S beliebig. Zeigen Sie, dass $(S) = \{\sum_{i=1}^n r_i s_i \mid n \geq 1, r_i \in R, s_i \in S\}$ gilt.

Aufgabe 5. (Selbststudium) Sei $n \geq 2$ und $X := \mathbb{R}^n$ (Zeilenvektoren). Definiert die folgende Abbildung

$$\mu: S_n \times X \rightarrow X, \quad (\pi, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \mapsto (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}),$$

eine Operation der Gruppe S_n auf der Menge X ? Wenn nicht, sehen Sie eine Möglichkeit, wie man die obige Definition sinnvoll korrigieren kann?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Bis Mittwoch, den 16.12., vor den Übungsgruppen.