6. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

Aufgabe 1. Seien $G, \tilde{G}$ Diedergruppen mit $|G| = |\tilde{G}| = 2m$, wobei $m \geq 2$. Es gilt also $G = \langle s, t\rangle$ und $\tilde{G} = \langle \tilde{s}, \tilde{t}\rangle$ wobei $s, t, \tilde{s}, \tilde{t}$ Ordnung 2 und die Produkte der Erzeuger jeweils Ordnung m haben. Zeigen Sie $G \cong \tilde{G}$. Genauer: Es gibt einen Isomorphismus $\varphi\colon G \to \tilde{G}$ mit $\varphi(s) = \tilde{s}$ und $\varphi(t) = \tilde{t}$.

Hier ist ein möglicher Hinweis, wie man dies zeigen kann: Sei $a := st \in G$ und $\tilde{a} := \tilde{s}\tilde{t} \in \tilde{G}$. Dann lässt sich jedes $g \in G$ eindeutig schreiben als $g = s^i a^j$ mit $i = 0, 1$ und $0 \leq j < m$; eine analoge Aussage gilt für $\tilde{G}$. Definieren Sie eine Abbildung $\varphi\colon G \to \tilde{G}$ durch $\varphi(s^i a^j) := \tilde{s}^i \tilde{a}^j$.

Aufgabe 2. (Schriftlich, 9 Punkte) Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen der Quaternionengruppe Q_8, der Diedergruppe D_8 sowie der symmetrischen Gruppe S_4.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit $|G| = p^n$, $n \geq 2$.

(a) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass dann G entweder zyklisch und isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ist, oder isomorph zu dem direkten Produkt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times Z/p\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie: Wenn G abelsch ist und es genau eine Untergruppe $U \leq G$ mit $|U| = p$ gibt, so ist G zyklisch.

Aufgabe 4. (Schriftlich, 8 Punkte) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $|G| = \infty$ und G einfach, so hat G keine Untergruppe $U \leq G$ mit $1 < [G : U] < \infty$.

[*Hinweis:* Ist U Untergruppe von G, so betrachten Sie die Operation von G auf $X = G/U$ und den zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_X$, siehe Beispiel 8.11 der Vorlesung.]

(b) Ist G endlich und N ein Normalteiler von G mit $\mathrm{ggT}(|N|,\ [G : N]) = 1$, so ist N die einzige Untergruppe der Ordnung $|N|$ von G.

[*Hinweis:* Sei $U \leq G$ mit $|U| = |N|$. Ist $u \in U$, was können Sie über die Ordnung von $uN \in G/N$ aussagen?]

Aufgabe 5. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, wobei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Körper mit 3 Elementen ist.

(a) Zeigen Sie $|G| = 24$. (Benutzen Sie die Formel für $|\mathrm{GL}_n(K)|$ in Beispiel 8.6(b) der Vorlesung.)

(b) Wie viele Elemente der Ordnung 2 gibt es in G? Ist $G \cong S_4$?

(c) Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen von G.

Aufgabe 6. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die in Beispiel 1.5 der Vorlesung definierte Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen $B_n(K) \leq \mathrm{GL}_n(K)$ auflösbar ist. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Welches ist das kleinste $r \geq 1$, so dass $B_n(K)^{(r)} = \{I_n\}$ gilt?

Aufgabe 7. (Selbststudium) In dieser Aufgabe geht es darum, die Konjugiertenklassen von S_n für $n \geq 2$ beliebig zu bestimmen. Dazu betrachten wir zuerst Zykel und dann die Zykelzerlegung von Permutationen; siehe Beispiel 6.4 der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie: Seien $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $l \geq 1$ paarweise verschieden. Dann gilt

$$\pi \circ (i_1\ i_2\ \ldots\ i_l) \circ \pi^{-1} = (\pi(i_1)\ \pi(i_2)\ \ldots\ \pi(i_l)) \qquad \text{für alle } \pi \in S_n.$$

(D.h., Wenn man einen l-Zykel mit einem Element $\pi \in S_n$ konjugiert, so erhält man wieder einen l-Zykel; und die Ziffern im neuen l-Zykel entstehen einfach durch Anwenden von π auf die Ziffern im ursprünglichen Zykel).

(b) Sei $1 \leq l \leq n$ fest. Zeigen Sie, dass alle l-Zykel in S_n konjugiert sind, und diese eine Konjugiertenklasse in S_n bilden.

Nun sei $\pi \in S_n$ beliebig. Dann gilt $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r$, wobei $r \geq 1$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ disjunkte Zykeln sind. Seien $l_1, l_2, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$ so, dass σ_i ein l_i-Zykel ist für $1 \leq i \leq r$. Da disjunkte Zykeln vertauchbar sind, können wir die Reihenfolge der σ_i so einrichten, dass $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_r$ gilt. Dann nennen wir das Tupel $(l_1, l_2, \ldots, l_r) \in \mathbb{N}^r$ den **Zykel-Typ** von π. Beachte: Zykel der Länge 1 werden hier stets mitgezählt, es gilt daher $n = l_1 + l_2 + \ldots + l_r$.

Die in Beispiel 6.4 der Vorlesung betrachtete Permutation $\pi = (1\ 3\ 4\ 5) \circ (2\ 8\ 6) \circ (7) \in S_8$ hat also den Zykel-Typ $(4, 3, 1)$; der 5-Zykel $(2\ 3\ 1\ 5\ 4) \in S_5$ hat Zykel-Typ (5); als Element in S_7 betrachtet hat er Zykel-Typ $(5, 1, 1)$.

Sei $P(n)$ die Menge aller möglichen Zykel-Typen in S_n, d.h., die Menge aller Tupel $(l_1, \ldots, l_r) \in \mathbb{N}^r$, wobei $r \geq 1$, $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_r$ und $n = l_1 + l_2 + \ldots + l_r$ gilt. Zum Beispiel ist $P(2) = \{(2), (1, 1)\}$, $P(3) = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$, $P(4) = \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$, usw; für $n = 10$ gilt bereits $|P(10)| = 42$.

Sei nun $(l_1, l_2, \ldots, l_r) \in P(n)$ gegeben. Dann definiere wie folgt Zykel $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_n$: Benutze die ersten l_1 Ziffern aus $\{1, \ldots, n\}$ für σ_1, also $\sigma_1 := (1\ 2\ \ldots\ l_1)$; dann benutze die nächsten l_2 Ziffern für σ_2, also $\sigma_2 := (l_1{+}1\ l_1{+}2\ \ldots l_1{+}l_2)$, und so weiter; schließlich benutze die letzten l_r Ziffern um σ_r zu definieren. Die Permutation $\pi_{(l_1,\ldots,l_r)} := \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r \in S_n$ hat dann offensichtlich den Zypel-Typ $(l_1, l_2, \ldots, l_r)$. Sei $C_{(l_1,\ldots,l_r)} \subseteq S_n$ die Konjugiertenklasse von $\pi_{(l_1,\ldots,l_r)}$.

(c) Zeigen Sie: Es gibt genau $|P(n)|$ Konjugiertenklassen in S_n; diese sind gegeben durch $C_{(l_1,\ldots,l_r)}$ für $(l_1, \ldots, l_r) \in P_n$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Bis Mittwoch, den 9.12., vor den Übungsgruppen.