# 5. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

**Aufgabe 1.** Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Sei $G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$.

**(a)** Finden Sie ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.
**(b)** Zeigen Sie dass jedes Element in $G$ endliche Ordnung hat.
**(c)** Zeigen sie dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Untergruppe $H_n$ der Ordnung $n$ gibt und dass $H_n$ zyklisch ist. Außerdem ist $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

**Aufgabe 2.** (Schriftlich, 8 Punkte) Sei $G$ eine Gruppe und $U, V$ zwei Normalteiler mit $U \cap V = \{1\}$.

**(a)** Zeigen Sie: $uv = vu$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

**(b)** Zeigen Sie: Sind $U, V$ abelsch, so ist $UV$ ein abelscher Normalteiler von $G$.

**(c)** Es gelte $G = UV$. Zeigen Sie: $G \cong U \times V$.

**(d)** Zeigen Sie : sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd so ist $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

**Aufgabe 3.** (Schriftlich, 9 Punkte) Sei $G$ eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller bijektiven Gruppenhomomorphismen $\alpha\colon G \to G$ (auch Automorphismen genannt).

**(a)** Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe ist, mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung.

**(b)** Für festes $g \in G$ definieren wir eine Abbildung $\gamma_g\colon G \to G$ durch $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie, dass $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(G)$ gilt.

**(c)** Zeigen Sie: Die Abbildung $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \gamma_g$, ist ein Gruppen-Homomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\gamma) = Z(G)$. Sei $\mathrm{Inn}(G) := \{\gamma_g \mid g \in G\}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$. Die Automorphismen in $\mathrm{Inn}(G)$ heißen "innere Automorphismen".

**Aufgabe 4.**

**(a)** Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass wenn $G$ endlich ist so ist auch $\varphi(G)$ endlich und $|\varphi(G)|$ teilt $|G|$.

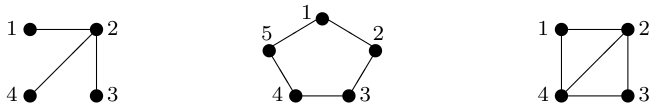
**(b)** Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass wenn $H$ endlich ist so ist auch $\varphi(G)$ endlich und $|\varphi(G)|$ teilt $|H|$.

**(c)** Seien $G, H$ Gruppen, dann gibt es immer den *trivialen Homomorphismus* definiert durch $\varphi(g) = 1_H$, $\forall g \in G$.

Für jeden der folgenden Fälle, geben Sie ein Beispiel eines nicht trivialen Homomorphismus an oder begründen Sie dass keiner existiert :

$(i)$ $\varphi\colon \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $(ii)$ $\varphi\colon \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $(iii)$ $\varphi\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$(iv)$ $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $(v)$ $\varphi\colon Q_8 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $(vi)$ $\varphi\colon D_8 \to S_3$
$(vii)$ $\varphi\colon S_4 \to S_3$ $(viii)$ $\varphi\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $(ix)$ $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3$ $(x)$ $\varphi\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$.

**Aufgabe 5.** Gegeben seien die folgenden Graphen:




**(a)** Bestimmen Sie jeweils die Symmetrie-Gruppe $S_{\mathcal{G}}$ (analog zu Bemerkung 8.2 der Vorlesung).

**(b)** Als Untergruppe von $S_n$ (wobei $\{1, \ldots, n\}$) die Ecken nummeriert) operiert auch $S_{\mathcal{G}}$ auf $\{1, \ldots, n\}$. Prüfen Sie in jedem der drei Fälle, ob diese Operation transitiv ist. Bestimmen Sie jeweils den Stabilisator von 1 in $S_{\mathcal{G}}$.

**(c)** (Selbststudium) Bestimmen Sie die Symmetrie-Gruppe des regelmäßigen $n$-Ecks, für $n \geq 3$.

```
# Hier ist ein (einfaches) GAP-Programm zur Berechnung der Symmetrie-Gruppe.
# Fuer GAP (inkl. download, Tutorials, ...) siehe: https://www.gap-system.org/
# Input: n und V (Liste von Paaren [i,j] fuer die Kanten)
GraphAuto:=function(n,V)
  local G,pi;
  G:=[];
  for pi in SymmetricGroup(n) do
    if ForAll(V,v->[v[1]^pi,v[2]^pi] in V or [v[2]^pi,v[1]^pi] in V) then
      Add(G,pi);
    fi;
  od;
  return G;
end;
D8:=GraphAuto(4,[[1,2],[2,3],[3,4],[1,4]]);   # Beispiel aus Bemerkung 8.2
```

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Bis Mittwoch, den 2.12., vor den Übungsgruppen.