# 4. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

**Aufgabe 1.** (Schriftlich, 8 Punkte) In dieser Aufgabe geht es um Diedergruppen; siehe Beispiel 6.3 der Vorlesung.

**(a)** Sei $G$ eine Diedergruppe, d.h., es gibt Elemente $s, t \in G$ mit $G = \langle s, t\rangle$, $s \neq t$ und $o(s) = o(t) = 2$. Sei $a := st \in G$ und $o(st) = m < \infty$. Zeigen Sie: $U := \langle a \rangle$ ist eine Untergruppe mit $[G : U] = 2$ und $s \notin U$, $t \notin U$; es gilt $G = \langle s, a\rangle = \langle t, a\rangle$ und $|G| = 2m$.

**(b)** Zeigen Sie, dass die in Ü2A5 definierte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ eine Diedergruppe ist.

**(c)** Sei $m \geq 2$ und $\varepsilon_m := e^{2\pi i/m} \in \mathbb{C}$. Wir definieren eine Abbildung $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\sigma(z) := \varepsilon_m z$ für $z \in \mathbb{C}$. Außerdem definieren wir $\tau\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\tau(z) := \overline{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ (komplexe Konjugation). Interpretieren Sie $\sigma$ und $\tau$ geometrisch in der komplexen Zahlenebene. Die Abbildungen $\sigma$ und $\tau$ sind offenbar bijektiv, also gilt $\sigma, \tau \in S_{\mathbb{C}}$ (symmetrische Gruppe auf der Menge $X = \mathbb{C}$, siehe §1 der Vorlesung). Zeigen Sie: $G_{2m} := \langle \sigma, \tau \rangle \leq S_{\mathbb{C}}$ ist eine Diedergruppe der Ordnung $2m$.

**Aufgabe 2.** **(a)** Wir betrachten drei Permutationen in $S_8$, wie folgt : $\sigma = (1\ 4\ 5)\circ(7\ 8)\circ(2\ 5\ 7)$, $\tau = (1\ 2)\circ(4\ 7\ 8)\circ(2\ 1)\circ(7\ 2\ 8\ 1\ 5)$, $\pi = (1\ 3\ 2\ 7)\circ(2\ 3)\circ(4\ 8\ 6)$. Schreiben Sie diese drei Permutationen als Produkte von disjunkten Zykeln.

**(b)** Für jede der Permutationen in Teil **(a)** finden Sie deren Ordnung.

**(c)** Formulieren Sie eine Aussage über die Ordnung einer Permutation, gegeben als Produkt von disjunkten Zykeln.

[*Hinweis :* Nützliches Konzept : *kleinste gemeinsame Vielfache.*]

**(d)** Finden Sie die maximale Ordnung eines Elements in $S_n$, wobei $n = 5$ oder $n = 6$ oder $n = 7$ oder $n = 10$ oder $n = 15$.

**Aufgabe 3.** Sei $G$ eine endliche Gruppe mit $|G| = 2n$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $G$ mindestens ein Element mit Ordnung 2 enthält.
**(b)** Sei nun $n$ ungerade und $G$ abelsch. Zeigen Sie, dass $G$ *genau* ein Element mit Ordnung 2 enthält.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass eine Gruppe $G \neq \{1_G\}$ ohne echte Untergruppen endlich sein muss und ihre Ordnung eine Primzahl sein muss.

**Aufgabe 5.** (Schriftlich, 9 Punkte) Zeigen Sie, dass $V_4 := \{\mathrm{id}, (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3)\}$ ein Normalteiler der alternierenden Gruppe $A_4$ ist; bestimmen Sie alle Untergruppen von $A_4$. Zeigen Sie insbesondere, dass es keine Untergruppe der Ordnung 6 gibt. (Dies ist das kleinste Beispiel einer endlichen Gruppe, wo es zu einem Teiler $d$ der Gruppenordnung keine Untergruppe der Ordnung $d$ gibt.)

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Bis Mittwoch, den 25.11., vor den Übungsgruppen.