11. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020/21

Aufgabe 1. **(a)** Zeigen Sie, dass die Menge $\{ \sqrt[2^n]{2} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. (Dies liefert einen anderen Beweis dafür, dass $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ gilt.)

(b) Zeigen Sie für jede der folgenden Zahlen $z \in \mathbb{C}$, dass z algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom:

$$\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \sqrt[17]{-48}, \qquad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \qquad \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}, \qquad \sqrt[5]{2+\sqrt{-6}}, \qquad \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{-2}).$$

Aufgabe 2. (Schriftlich, 9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Körpergrade der folgenden Erweiterungen:

(i) $\mathbb{R}(\sqrt{5}) \supseteq \mathbb{R}$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \supseteq \mathbb{Q}$ (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6}) \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (iv) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3}) \supseteq \mathbb{Q}$
(v) $\mathbb{Q}(3,\sqrt{5},\sqrt{11}) \supseteq \mathbb{Q}$ (vi) $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}}) \supseteq \mathbb{Q}$ (vii) $\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{15}) \supseteq \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{11})$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3})$.

Aufgabe 3. Sei $\alpha := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}$. In Aufgabe 1(b) haben Sie gesehen, dass α algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, und das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ bestimmt. Betrachten Sie nun die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$. Nach Satz 16.3 der Vorlesung lässt sich jedes Element von L eindeutig schreiben als $\sum_{i=0}^{d-1} a_i\alpha^i$, wobei $d := \mathrm{Grad}(\mu_\alpha) \geq 1$ und $a_i \in \mathbb{Q}$. Finden Sie solche eindeutigen Darstellungen für die folgenden Elemente in L:

$$\alpha^4, \qquad (2-\alpha)^{-1}, \qquad \left(\tfrac{1}{5}\alpha^2+\tfrac{1}{3}\right)\left(\alpha^3-\tfrac{3}{5}\alpha+2\right).$$

Aufgabe 4. Wahr oder falsch? (Kurzer Beweis oder Gegenbeispiel.)

(i) $\mathbb{C}$ ist eine einfache Erweiterung von $\mathbb{Q}$.
(ii) $\mathbb{C}$ ist eine einfache Erweiterung von $\mathbb{R}$.
(iii) Jede einfache Erweiterung ist algebraisch.
(iv) Jede Erweiterung ist einfach.
(v) Jedes Element eines Körpers K ist algebraisch über K.
(vi) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ vom Grad n. Wenn $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$ mit $f(\alpha) = 0$, dann ist $\mathrm{Grad} f \geq n$.
(vii) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ vom Grad n. Wenn $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$ mit $f(\alpha) = 0$, dann ist $\mathrm{Grad} f \geq n$.
(viii) Jede algebraische Erweiterung eines Körpers ist eine endliche Erweiterung.

Aufgabe 5. (Schriftlich, 6 Punkte) Sei $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] < \infty$.

(a) Zeigen Sie: Ist $[L : K]$ eine Primzahl, so gilt : (i) wenn M ein Körper ist mit $K \subseteq M \subseteq L$, dann gilt $M = K$ oder $M = L$; (ii) es existiert ein Element $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.

(b) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel mit $\mathrm{Grad}(f) \geq 2$. Zeigen Sie: Sind $\mathrm{Grad}(f)$ und $[L : K]$ teilerfremd, so hat f keine Nullstellen in L.

(c) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel mit $n := \mathrm{Grad}(f) \geq 1$. Zeigen Sie: Gibt es ein $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = 0$, so ist $[L : K] \geq n$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Bis Mittwoch, den 27.01., vor den Übungsgruppen.