10. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020/21

Aufgabe 1. Sei R ein Integritätsring, $n \geq 1$ und $R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Zeigen Sie die Formel (1) im Beweis von Satz 14.4, also $\mathrm{LT}(f \cdot g) = \mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g)$ für $f, g \in R[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f \neq 0$, $g \neq 0$.

(b) Sei $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$. Sind $y_1, \ldots, y_n \in R$ gegeben, so können wir jedes y_i für X_i einsetzen und erhalten $f(y_1, \ldots, y_n) \in R$. Zeigen Sie: Ist $|R| = \infty$ und $f(y_1, \ldots, y_n) = 0$ für alle $y_1, \ldots, y_n \in R$, so folgt $f = 0$. (Für $n = 1$ ist dies bereits bekannt nach Lemma 12.7.)

Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Zeigen Sie, dass $f := \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} X_i^2 X_j \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ symmetrisch ist und bestimmen Sie ein $g \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f = g(s_1, \ldots, s_n)$. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Sei $\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\pi}(\Delta) = \varepsilon(\pi)\Delta$ für alle $\pi \in S_n$ gilt, wobei $\varepsilon(\pi) = \pm 1$ das Signum von π ist. — Es folgt, dass $\tilde{\pi}(\Delta^2) = \tilde{\pi}(\Delta)^2 = \varepsilon(\pi)^2\Delta^2 = \Delta^2$ für alle $\pi \in S_n$ gilt, also Δ^2 symmetrisch ist, wie bereits in der Vorlesung erwähnt.

Aufgabe 3. **(a)** Sei $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f. Bestimmen Sie $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2$.

(b) Sei $g = X^4 + X^3 + 2X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ und seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von g. Bestimmen Sie $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$.

Aufgabe 4. (Schriftlich, 16 Punkte) Wahr oder falsch? (Kurzer Beweis oder Gegenbeispiel.)

(i) Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_{19} = \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ enthält ein Element der Ordnung 3.
(ii) Ein endlicher Integritätsring ist ein Körper.
(iii) Ist p eine Primzahl, so ist jeder Körper der Charakteristik p endlich.
(iv) Jeder Körper der Charakteristik 0 ist unendlich.
(v) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung mit $|K| < \infty$ und $[L : K] < \infty$, dann gilt $|L| < \infty$.
(vi) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $t \in L$ transzendent über K, so ist $[L : K] = \infty$.
(vii) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $z \in L$ algebraisch über K, so ist auch $z + z^2$ algebraisch über K.
(viii) Ist $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $t \in L$ transzendent über K, so ist $t^2 + t^{-2} \in L$ algebraisch über K.

Aufgabe 5. (Selbststudium) Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{C}[X, Y]$ über $\mathbb{C}$ mit den Unbestimmten X, Y.

(a) Zeigen Sie, dass die Polynome $Y - X^2, \quad XY - 1, \quad X^3 - Y^2 - X \ \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreduzibel sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2)$ und $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$ Integritätsringe und Hauptidealringe sind.

(c) Zeigen Sie, dass der Ring $R = \mathbb{C}[X, Y]/(X^3 - Y^2 - X)$ ein Integritätsring ist, aber nicht faktoriell.

[*Hinweis zu (c):* Für $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ sei $\bar{f} := f + (X^3 - Y^2 - X) \in R$. Zeigen Sie, dass $\bar{Y} \in R$ irreduzibel ist, aber kein Primelement; beachte $\bar{Y}^2 = \bar{X}(\bar{X} - 1)(\bar{X} + 1)$.]

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Bis Mittwoch, den 20.01., vor den Übungsgruppen.