1. Übung zur Algebra

Dr. L. Iancu, WiSe 2020

Auf diesem ersten Blatt sind alle Aufgaben zum Selbststudium bzw. zur Besprechung in den Übungsgruppen am Mittwoch 4. November. (Ab dem nächsten Blatt wird es auch Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung geben.)

Aufgabe 1. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner!) das eindeutige $r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r \leq 6$ und $r \equiv 6^{82} \bmod 7$. Analoge Frage für $r \equiv 6^{82} \bmod 13$, wobei $0 \leq r \leq 12$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie Verknüpfungstabellen für die Addition und Multiplikation im Ring $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (analog zu den Tabellen im Skript, Seite 8). Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ Körper mit 2 Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass $K := \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen ein Körper mit 4 Elementen ist.

(b) Sei $\omega := \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in K$. Zeigen Sie, dass $K = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ gilt (wobei 0 und 1 die neutralen Elemente bzgl. Addition und Multiplikation in K bezeichnen). Bestimmen Sie die Verknüpfungstabellen für die Addition und Multiplikation in K (ausgedrückt mit Hilfe von $0, 1, \omega, \omega^2$).

Aufgabe 4. (a) Sei $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ der Ring der Gauß'schen Zahlen. Bestimmen Sie alle Zerlegungen $2 = a \cdot b$ wobei $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. Gleiche Frage für 6 und für $4 - 2i$.

(b) Zeigen Sie, dass $R = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilring von $\mathbb{R}$ ist und $|R^\times| = \infty$ gilt. Bestimmen Sie eine Zerlegung $1 = a \cdot b$ wobei $a, b \in R \setminus \{\pm 1\}$.

Aufgabe 5. Für $n \geq 1$ sei S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1, \ldots, n\}$. Bestimmen Sie die Anzahlen $|\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(3) = 3\}|$ und $|\{\sigma \in S_6 \mid \sigma(2) = 5\}|$. Können Sie daraus eine allgemeine Regel für die Anzahl $|\{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = j\}|$ raten wobei $1 \leq i, j \leq n$ fest gewählt sind?

Aufgabe 6. Sei G eine Gruppe und seien U, V Untergruppen von G. Zeigen Sie:

(a) $U \cup V$ ist eine Untergruppe $\quad\Leftrightarrow\quad U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.

(b) $U \cdot V$ ist eine Untergruppe $\quad\Leftrightarrow\quad U \cdot V = V \cdot U$.

(c) Sei $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Untergruppen von G. Gilt $U_n \subseteq U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ eine Untergruppe von G.

(Hierbei sei $A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ für beliebige Teilmengen A, B von G. Wahrscheinlich haben Sie eine ähnliche Aufgabe wie in (a) bereits in der Linearen Algebra behandelt, mit Teilräumen eines Vektorraums anstelle von Untergruppen einer Gruppe.)