

## 7. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie: Ist  $G$  eine endliche Gruppe mit  $|G| < 60$ , so ist  $G$  auflösbar.

**Aufgabe 2.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1 und  $S \subseteq R$  eine Teilmenge. Das von  $S$  erzeugte Ideal ist definiert als  $(S) := \bigcap_I I$ , wobei der Durchschnitt über alle Ideale  $I \trianglelefteq R$  mit  $S \subseteq I$  läuft.

(a) Sei zuerst  $S = \{a\}$  für ein  $a \in R$ . Zeigen Sie, dass  $(S) = \{xa \mid x \in R\}$  gilt, also  $(S)$  ein Hauptideal ist (siehe Beispiel 2.5 der Vorlesung).

(b) Sei nun  $S = \{a, b\}$  mit  $a, b \in R$ . Zeigen Sie, dass  $(S) = \{xa + yb \mid x, y \in R\}$  gilt.

(c) Sei  $S$  beliebig. Zeigen Sie, dass  $(S) = \{\sum_{i=1}^n r_i s_i \mid n \geq 1, r_i \in R, s_i \in S\}$  gilt.