6. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. Dieses Beispiel spielt eine Rolle in der Geometrie und komplexen Analysis. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (die obere komplexe Halbebene). Zeigen Sie, dass die folgende Vorschrift

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

eine Operation von G auf $\mathcal{H}$ definiert. (Warum ist $cz + d \neq 0$ und $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$?)
Bestimmen Sie den Kern des zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_{\mathcal{H}}$ und zeigen Sie, dass die Operation transitiv ist, es also nur eine Bahn gibt. (Hinweis: Bestimmen Sie die Bahn O_z für ein geschickt gewähltes $z \in \mathcal{H}$.)

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die in Beispiel 1.5 der Vorlesung definierte Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen $B_n(K) \leq \mathrm{GL}_n(K)$ auflösbar ist. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Welches ist das kleinste $r \geq 1$, so dass $B_n(K)^{(r)} = \{I_n\}$ gilt?

Die folgenden Aufgaben enthalten Anwendungen des Sylow-Satzes (und dessen Folgerungen).

Aufgabe 3. Sei G eine nicht-abelsche Gruppe mit $|G| = 93$. Bestimmen Sie für jede Primzahl p, welche $|G|$ teilt, die Anzahl der p-Sylow-Untergruppen von G.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $|G| = 42875$, so hat G einen Normalteiler der Ordnung 125. (Sie dürfen einen Computer benutzen, um 42875 zu faktorisieren.)

(b) Ist $|G| = 255$, so ist G nicht einfach.

(c) Ist $|G| = 159$, so ist G zyklisch.

Aufgabe 5. Sei G eine endliche Gruppe und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

$$|G| \text{ ist eine Potenz von } p \qquad \Leftrightarrow \qquad o(g) \text{ ist eine Potenz von } p, \text{ für alle } g \in G.$$

Aufgabe 6. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ Primzahlen. Zeigen Sie:
Ist G eine Gruppe mit $|G| = pq$ oder $|G| = p^2q$, so ist G auflösbar.