5. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. **(a)** Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: Ist G endlich, so ist auch $\varphi(G)$ endlich und $|\varphi(G)|$ teilt $|G|$.

(b) Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: Ist H endlich, so ist auch $\varphi(G)$ endlich und $|\varphi(G)|$ teilt $|H|$.

(c) Sind G, H Gruppen, so gibt es immer den *trivialen Homomorphismus* $\varphi\colon G \to H$ definiert durch $\varphi(g) := 1_H$ für alle $g \in G$. Für jeden der folgenden Fälle, geben Sie ein Beispiel eines nicht-trivialen Homomorphismus an oder begründen Sie dass keiner existiert :

(i) $\varphi\colon \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ *(ii)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *(iii)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
(iv) $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *(v)* $\varphi\colon Q_8 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *(vi)* $\varphi\colon D_8 \to S_3$
(vii) $\varphi\colon S_4 \to S_3$ *(viii)* $\varphi\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *(ix)* $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3$ *(x)* $\varphi\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen der Quaternionengruppe Q_8 (Beispiel 3.10), der Diedergruppe D_8 (Beispiel 6.3) sowie der symmetrischen Gruppe S_4.
Bestimmen Sie auch $Z(Q_8)$, $Z(D_8)$ und $Z(S_4)$ (wobei $Z(G) =$ Zentrum von G).

Aufgabe 3. Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, wobei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Körper mit 3 Elementen ist.

(a) Zeigen Sie $|G| = 24$. (Benutzen Sie die Formel für $|\mathrm{GL}_n(K)|$ in Beispiel 8.6(b) der Vorlesung.)

(b) Wie viele Elemente der Ordnung 2 gibt es in G? Ist $G \cong S_4$?

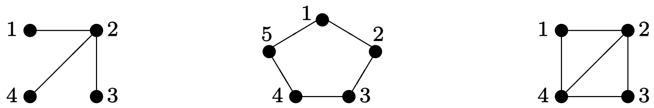
Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Ist $|G| = \infty$ und G einfach (siehe Definition 9.1), so hat G keine Untergruppe $U \leq G$ mit $1 < [G : U] < \infty$.

(b) Sei $|G| = 8$. Es gebe ein Element $g \in G$ mit $o(g) = 2$ und $g \notin Z(G)$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von S_4 ist.

[*Hinweis zu (a):* Ist $U \leq G$, so betrachten Sie die Operation von G auf $X = G/U$ (siehe Beispiel 8.1(c)) und den zugehörigen Homomorphismus $\pi\colon G \to S_X$ (siehe Beispiel 8.11. Zu (b): Nehmen Sie $U := \langle g \rangle$.]

Aufgabe 5. (Zum Selbststudium) Gegeben seien die folgenden Graphen:



(a) Bestimmen Sie jeweils die Symmetrie-Gruppe $S_{\mathcal{G}}$ (analog zu Bemerkung 8.2 der Vorlesung).

(b) Als Untergruppe von S_n (wobei $\{1, \ldots, n\}$) die Ecken nummeriert) operiert auch $S_{\mathcal{G}}$ auf $\{1, \ldots, n\}$. Prüfen Sie in jedem der drei Fälle, ob diese Operation transitiv ist. Bestimmen Sie jeweils den Stabilisator von 1 in $S_{\mathcal{G}}$.

(c) Bestimmen Sie die Symmetrie-Gruppe des regelmäßigen n-Ecks, für $n \geq 3$.

```
# Hier ist ein (einfaches) GAP-Programm zur Berechnung der Symmetrie-Gruppe.
# Fuer GAP (inkl. download, Tutorials, ...) siehe: https://www.gap-system.org/
# Input: n und V (Liste von Paaren [i,j] fuer die Kanten)
GraphAuto:=function(n,V)
  local G,pi;
  G:=[];
  for pi in SymmetricGroup(n) do
    if ForAll(V,v->[v[1]^pi,v[2]^pi] in V or [v[2]^pi,v[1]^pi] in V) then
      Add(G,pi);
    fi;
  od;
  return G;
end;
D8:=GraphAuto(4,[[1,2],[2,3],[3,4],[1,4]]);   # Beispiel aus Bemerkung 8.2
```