4. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Die ersten drei Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die ersten beiden Aufgaben enhalten Anwendungen von Satz 6.6 der Vorlesung (Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen), siehe auch Beispiel 7.14.

Aufgabe 1. (Schriftlich, 6 Punkte) Sei G eine abelsche Gruppe mit $|G| = 8$. Zeigen Sie, dass G zu einer der folgenden Gruppen isomorph ist:

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \qquad Z/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie auch, dass die obigen drei Gruppen nicht isomorph sind. (*Hinweis:* Zählen Sie für jede der 3 Gruppen, wieviele Elemente der Ordnung 2,4 oder 8 es jeweils gibt.)

Aufgabe 2. (Schriftlich, 10=6+4 Punkte) Sei G eine abelsche Gruppe mit $|G| < \infty$.

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $|G|$. Zeigen Sie: Es gibt eine Untergruppe $U \leq G$ mit $|U| = m$. (*Hinweis*: Seien $U_1, \ldots, U_r \leq G$ wie in Satz 6.6; jedes U_i ist zyklisch. Setzen wir $n_i := |U_i|$ für alle i, so ist $|G| = n_1 \cdots n_r$. Überlegen Sie sich, dass es dann $m_i \in \mathbb{N}$ gibt mit $m_i \mid n_i$ und $m = m_1 \cdots m_r$. Verwenden Sie schließlich Bemerkung 3.7 der Vorlesung.)

(b) Sei $|G| = 546$. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist. (*Hinweis*: Ü3A1.)

Aufgabe 3. (Schriftlich, 6=3+3) Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler.

(a) Sei $U \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Zeigen Sie, dass $U \cdot N = \{un \mid u \in U, n \in N\}$ eine Untergruppe von G ist; außerdem ist $U \cdot N = N \cdot U$.

(b) Sei G endlich und $g \in G$. Zeigen Sie: $\quad \mathrm{ggT}\big(o(g), [G:N]\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad g \in N.$
Zum Beispiel folgt damit sofort: $\quad \{\pi \in S_n \mid o(\pi) \text{ ungerade}\} \subseteq A_n$ für $n \geq 2$.
(*Hinweis zu (b)*: Betrachten Sie den kanonischen Homomorphismus $\pi_N \colon G \to G/N$.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $V_4 := \{\mathrm{id}, (1\,2) \circ (3\,4), (1\,3) \circ (2\,4), (1\,4) \circ (2\,3)\}$ ein Normalteiler der alternierenden Gruppe A_4 ist; bestimmen Sie alle Untergruppen von A_4. Zeigen Sie insbesondere, dass es keine Untergruppe der Ordnung 6 gibt. (Dies ist das kleinste Beispiel einer endlichen Gruppe, wo es zu einem Teiler d der Gruppenordnung keine Untergruppe der Ordnung d gibt.)

Aufgabe 5. Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Sei $G = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$.

(a) Finden Sie ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie dass jedes Element in G endliche Ordnung hat.

(c) Zeigen sie dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Untergruppe H_n der Ordnung n gibt und dass H_n zyklisch ist. Außerdem ist $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

Aufgabe 6. Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt mindestens ein Element in G der Ordnung 2.

(b) Ist G abelsch und n ungerade, so gibt es genau ein Element in G der Ordnung 2. Gilt dies auch für G nicht-abelsch?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Bis Montag, den 15.5., vor der Übungsgruppe.