3. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe. Gegeben seien $g_1, g_2 \in G$ mit $o(g_1) < \infty$ und $o(g_2) < \infty$. Zeigen Sie: Gilt $g_1g_2 = g_2g_1$ und $\mathrm{ggT}(o(g_1), o(g_2)) = 1$, so folgt $o(g_1g_2) = o(g_1)o(g_2)$.

Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass man auf keine der beiden Voraussetzungen verzichten kann.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi(n)$ die Eulersche Phi-Funktion.

(a) Sei $n = 2^k$ mit $k \geq 1$. Bestimmen Sie $\phi(n)$.

(b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi(n) \leq 2$. Zum Beispiel gilt $\phi(1) = \phi(2) = 1$, $\phi(3) = \phi(4) = \phi(6) = 2$. Gibt es noch weitere solche n ?

[*Hinweis zu (b):* Sei $n \geq 7$. Dann sind 1 und $n-1$ teilerfremd zu n, also ist $\phi(n) \geq 2$. Ist n ungerade, so betrachte auch $n-2$. Ist n gerade, so schreibe $n = 2^k m$ mit $k \geq 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ungerade.]

Aufgabe 3. **(a)** Sei G eine Diedergruppe (siehe Beispiel 6.3 der Vorlesung), d.h., es gibt $s, t \in G$ mit $G = \langle s, t \rangle$, $s \neq t$ und $o(s) = o(t) = 2$. Sei $a := st \in G$ und $o(st) = m < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $U := \langle a \rangle$ ist eine Untergruppe mit $[G : U] = 2$ und $s \notin U$, $t \notin U$;

(b) $G = \langle s, a \rangle = \langle t, a \rangle$ und $|G| = 2m$.

(c) Die in Ü2A5 definierte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist eine Diedergruppe.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 2$. Eine Permutation $\pi \in S_{n-1}$ können wir auch als Permutation von S_n auffassen, indem wir $\pi(n) = n$ setzen. Damit ist also $S_{n-1} \leq S_n$. (Ist $\pi \in S_n$ und $\pi(n) = n$, so können wir umgekehrt π auch als Permutation in S_{n-1} auffassen.)

Für $1 \leq k < n$ betrachte die Transposition $\tau_k := (k\ n) \in S_n$ (siehe Beispiel 6.4 der Vorlesung). Zeigen Sie, dass $\{\mathrm{id}, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$ ein Repräsentantensystem für die (Links-)Nebenklassen von S_{n-1} in S_n ist, d.h., es gilt $S_n = S_{n-1} \cup \tau_1 S_{n-1} \cup \ldots \cup \tau_{n-1} S_{n-1}$, wobei die Vereinigung disjunkt ist.

[*Hinweis:* Wegen $|S_n| = n!$ und $|S_{n-1}| = (n-1)!$ ist nach dem Satz von Lagrange klar, dass es genau n Nebenklassen in S_n bezüglich S_{n-1} gibt.]

Aufgabe 5. Sei $n \geq 2$. Wie in der vorherigen Aufgabe betrachten wir S_{n-1} als Untergruppe von S_n. Zeigen Sie: Jedes $\pi \in S_n$ lässt sich als Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen schreiben.

[*Hinweis:* Benutzen Sie vollständige Induktion nach n. Ist $\pi \in S_n$ mit $k := \pi(n) \neq n$, so betrachten Sie die Transposition $(k\ n) \in S_n$.]

Aufgabe 6. **(a)** Wir betrachten drei Permutationen in S_9, wie folgt:

$$\sigma = (1\ 4\ 5\ 9)\circ(7\ 8)\circ(2\ 5\ 7), \quad \tau = (1\ 2)\circ(4\ 7\ 8\ 9)\circ(2\ 1)\circ(7\ 2\ 8\ 1\ 5\ 9), \quad \pi = (1\ 3\ 2\ 7)\circ(2\ 3)\circ(4\ 8\ 6)$$

(wobei wir die Zykelschreibweise aus Beispiel 6.4 der Vorlesung benutzen). Schreiben Sie diese drei Permutationen als Produkte von disjunkten Zykeln.

(b) Für jede der Permutationen in Teil **(a)** finden Sie deren Ordnung.

(c) Formulieren Sie eine Aussage über die Ordnung einer Permutation, gegeben als Produkt von disjunkten Zykeln.

(d) Finden Sie die maximale Ordnung eines Elements in S_n, wobei $n = 5$ oder $n = 6$ oder $n = 7$ oder $n = 10$ oder $n = 15$.