2. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. Sei $d = -1$ oder $d \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl der Form $d = \pm p_1 \cdots p_r$, wobei $r \geq 1$ and $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen in $\mathbb{N}$ sind. Ist $d > 0$, so sei $\sqrt{d} \in \mathbb{R}$ die positive reelle Quadratwurzel aus d. Ist $d < 0$, so sei $\sqrt{d} = i\sqrt{-d}$, wobei wie üblich $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. (Also zum Beispiel $\sqrt{-6} = i\sqrt{6} \in \mathbb{C}$.) Wir betrachten die Menge

$$A_d := \{n + m\omega_d \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C} \qquad \text{wobei} \qquad \omega_d := \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\sqrt{d}) & \text{falls } 4 \mid d-1, \\ \sqrt{d} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Beispiel ist $\omega_{-1} = i$, also ist $A_{-1} = \{n + mi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der Gauß'schen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass A_d ein Teilring von $\mathbb{C}$ ist.

(b) Im Skript, Beispiel 1.6, wird gezeigt dass, $A_{-1}^{\times} = \{\pm 1, \pm i\}$ gilt. Bestimmen Sie nun auch $A_d^{\times}$ für $d = -2, -3, -5$.

In den folgenden Aufgaben benutzen wir folgende Konventionen. Ist G eine Gruppe, so schreiben wir die Verknüpfung in G als $a \cdot b$ oder einfach als ab; das neutrale Element wird mit 1_G (oder einfach 1) bezeichnet, sowie das inverse Element mit a^{-1}. Sei $g \in G$. Gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m = 1_G$, so bezeichnen wir das kleinste solche m mit $o(g)$ und nennen dies die Ordnung von g; gibt es kein solches m, so setzen wir $o(g) = \infty$. (Siehe Skript, Definition 3.4.)

Aufgabe 2. Gegeben seien die folgenden Elemente der Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ordnungen von A, B und AB.

(b) Bestimmen Sie A^{2020}, B^{2020} und $(AB)^{-2020}$.

Aufgabe 3. Sei G eine abelsche Gruppe und $T(G) := \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$. Zeigen Sie, dass $T(G)$ eine Untergruppe von G ist. Gilt dies auch für nicht-abelsche Gruppen? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

Aufgabe 4. Seien G_1, G_2 Gruppen der Ordnung 2. Wie viele Untergruppen hat das direkte Produkt $G_1 \times G_2$? (siehe Skript, Definition 1.8). Können Sie dies auf den Fall verallgemeinern, wo G_1, G_2 Ordnung p haben, mit einer Primzahl p ?

Aufgabe 5. (Schriftlich, 9 Punkte) Gegeben sei die Teilmenge (mit 8 Elementen)

$$D_8 := \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

(a) Zeigen Sie, dass D_8 eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist.
(b) Bestimmen Sie die Ordnung $o(g)$ für alle $g \in D_8$.
(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von D_8.

Aufgabe 6. Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und $a, b \in G$. Wahr oder falsch (mit Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) Wenn $aH = bH$ dann $Ha = Hb$.

(b) Wenn $Ha = Hb$, dann $b \in Ha$.

(c) Wenn $aH = bH$, dann $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.

(d) Wenn $aH = bH$, dann $a^2H = b^2H$.