12. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. Sei $\alpha = 2\cos(2\pi/9) \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass α algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist. Schreiben Sie dazu $\alpha = \zeta_9 + \zeta_9^{-1}$, wobei $\zeta_9 = e^{2\pi i/9} \in \mathbb{C}$ eine primitive neunte Einheitswurzel ist.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f = \mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ von α über $\mathbb{Q}$. Schreiben Sie dazu $\alpha = \zeta_9 + \zeta_9^{-1}$ wie in (a), berechnen Sie damit $\alpha^2, \alpha^3, \ldots$, und versuchen Sie, eine Linearkombination zwischen diesen Potenzen zu finden.

(c) Zeigen Sie (z.B. mit einer Kurvendiskussion), dass f drei verschiedene reelle Nullstellen hat. Zeigen Sie, dass $\beta = 2\cos(4\pi/9)$ und $\gamma = 2\cos(8\pi/9)$ die beiden weiteren Nullstellen sind.

(d) Nach **(c)** ist $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) \subseteq \mathbb{R}$ ein Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2. Gegeben seien die Startpunkte $P_0 = \{(0,0), (1,0)\}$ in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist mit Lineal und Zirkel aus P_0 konstruierbar genau dann, wenn $(x, 0)$ und $(0, y)$ aus P_0 mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe geht es um das Problem der **Winkeldreiteilung** (siehe §18 der Vorlesung). Gegeben sei ein Winkel, also eine reelle Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varphi \leq \pi$. Anschaulich ist dieser Winkel gegeben durch zwei Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$: Die eine Gerade geht durch die beiden Punkte in der Startmenge $P_0 = \{(0,0), (1,0)\}$, die andere durch die beiden Punkte $(0,0)$ und $\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)$. Entsprechend sagen wir, dass φ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wenn der Punkt $\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \in \mathbb{R}^2$ mit Zirkel und Lineal aus P_0 konstruierbar ist.

(a) Sei von nun an $\varphi = \pi/3$. Konstruieren Sie den Winkel φ mit Zirkel und Lineal. Wieviele elementare Konstruktionsschritte benötigen Sie dazu? (Gemeint ist also das n in Definition 18.1(b).)

(b) Zeigen Sie, dass der Körpergrad $[\mathbb{Q}(\cos(\pi/9)) : \mathbb{Q}]$ endlich, aber keine 2-Potenz ist. (*Hinweis:* Wie hängt $\cos(\pi/9)$ mit dem α in Aufgabe 1 zusammen?) Nach Satz 18.3 ist also $\pi/9 = \varphi/3$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar (aus der Startmenge P_0).

(c) Zeigen Sie, das $\pi/9 = \varphi/3$ auch nicht aus der Startmenge $P_1 = \{(0,0), (1,0), \big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)\}$ konstruierbar ist — und damit die Winkeldreiteilung im Allgemeinen unmöglich; siehe dazu auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels`

Aufgabe 4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Cardano'schen Formeln die Nullstellen in $\mathbb{C}$ der folgenden Polynome; für jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$, geben Sie explizit an, ob $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oder $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt.

$$X^3 + 6X + 2, \qquad X^3 - 3X + 1, \qquad X^3 + 6X - 20, \qquad X^3 - 15X - 4, \qquad X^3 + X^2 - 2$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie alle $m \in \mathbb{N}$ mit $\cos(2\pi/m) \in \mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Satz 18.5 und Ü3A2.)