11. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. **(a)** Bestimmen Sie die Körpergrade der folgenden Erweiterungen:

(i) $\mathbb{R}(\sqrt{5}) \supseteq \mathbb{R}$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \supseteq \mathbb{Q}$ (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (iv) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3}) \supseteq \mathbb{Q}$
(v) $\mathbb{Q}(3, \sqrt{5}, \sqrt{11}) \supseteq \mathbb{Q}$ (vi) $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}}) \supseteq \mathbb{Q}$ (vii) $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) \supseteq \mathbb{Q}$
(viii) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3},\ \sqrt[13]{6})$.

(b) Zeigen Sie: (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{11})$ (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3})$.

Hinweis: Gradsatz in Kombination mit Satz 16.3; siehe auch Beispiel 16.8.

Aufgabe 2. Sei $\alpha := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}$. In Ü10A5(b) haben Sie gesehen, dass α algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, und das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ bestimmt. Betrachten Sie nun die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\alpha) \supseteq \mathbb{Q}$. Nach Satz 16.3 der Vorlesung lässt sich jedes Element von L eindeutig schreiben als $\sum_{i=0}^{d-1} a_i \alpha^i$, wobei $d := \mathrm{Grad}(\mu_\alpha) \geq 1$ und $a_i \in \mathbb{Q}$. Finden Sie solche eindeutigen Darstellungen für die folgenden Elemente in L:

$$\alpha^4, \qquad (2-\alpha)^{-1}, \qquad \left(\tfrac{1}{5}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\right)\left(\alpha^3 - \tfrac{3}{5}\alpha + 2\right).$$

Hinweis: Wir illustrieren einen möglichen Lösungsweg mit einem einfachen Beispiel. Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ mit $\mu_\alpha = X^3 - 2$. Betrachte das Element α^{-1}. Wir wollen also $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ finden mit $\alpha^{-1} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$. Umformen ergibt $-1 + a_0\alpha + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^3 = 0$. Wegen $\mu_\alpha(\alpha) = 0$ gilt $\alpha^3 = 2$. Einsetzen ergibt $(-1 + 2a_2) + a_0\alpha + a_1\alpha^2 = 0$. Wegen der Eindeutigkeit in Satz 16.3 muss also $-1 + 2a_2 = a_0 = a_1 = 0$ gelten.

Aufgabe 3. Sei $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] < \infty$.

(a) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel mit $\mathrm{Grad}(f) \geq 2$. Zeigen Sie: Sind $\mathrm{Grad}(f)$ und $[L : K]$ teilerfremd, so hat f keine Nullstellen in L.

(b) Sei $f \in K[X]$ irreduzibel mit $n := \mathrm{Grad}(f) \geq 1$. Zeigen Sie: Gibt es ein $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = 0$, so ist $n \mid [L : K]$.