10. Übung zur Algebra

Prof. M. Geck, SoSe 2023

Aufgabe 1. Sei R ein Integritätsring, $n \geq 1$ und $R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie die Formel (1) im Beweis von Satz 14.4, also

$$\mathrm{LT}(f \cdot g) = \mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g) \qquad \text{für } f, g \in R[X_1, \ldots, X_n] \text{ mit } f \neq 0,\ g \neq 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall, dass $g = cX_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ mit $0 \neq c \in R$ und $i_1, \ldots, i_n \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie, dass $f := \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} X_i^2 X_j \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ symmetrisch ist und bestimmen Sie ein $g \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f = g(s_1, \ldots, s_n)$. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Aufgabe 3. **(a)** Sei $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und seien α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f. Bestimmen Sie $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2$ (explizit als komplexe Zahl $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$).

(b) Sei $g = X^4 + X^3 + 2X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ und seien α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von g. Bestimmen Sie $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$.

Hinweis: Die "verblüffende Konsequenz" in Beispiel 14.6.

Aufgabe 4. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{C}[X, Y]$ über $\mathbb{C}$ mit den Unbestimmten X, Y. Zeigen Sie, dass die Polynome $Y - X^2$, $XY - 1$, $X^3 - Y^2 - X \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreduzibel sind.

Aufgabe 5. **(a)** Zeigen Sie, dass die Menge $\{ \sqrt[2^n]{2} \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. (Dies liefert einen anderen Beweis dafür, dass $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ gilt.)

(b) Zeigen Sie für jede der folgenden Zahlen $z \in \mathbb{C}$, dass z algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom:

$$\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \qquad \sqrt[17]{-48}, \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \qquad \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, \qquad \sqrt[5]{2 + \sqrt{-6}}, \qquad \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{-2}).$$