Wintersemester 2021/22
Samstag, 29.01.2022
Scheinklausur

Scheinklausur in Algebra

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

1. (3+3 Punkte) Gegeben ist die Menge
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$
   (a) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist. Ist G abelsch?
   (b) Bestimmen Sie einen Normalteiler H von G, sodass G/H isomorph zu $\mathbb{Q}^\times$ ist.

2. (4 Punkte) Gegeben ist die Permutation
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 9 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$
der symmetrischen Gruppe S_9. Bestimmen Sie die Ordnung von σ und entscheiden Sie, ob σ in einem echten Normalteiler der S_9 enthalten ist.

3. (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Sylow-Sätze, dass jede Gruppe G der Ordnung 20 auflösbar ist. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie die Kompositionsfaktoren von G.

4. (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_{15}$. Ist die Gruppe $\mathbb{Z}_{15}^\times$ zyklisch?

5. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + (x^2) \mapsto (a_0, a_0)$$
ein Ringhomomorphismus $\phi\colon \mathbb{Q}[x]/(x^2) \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definiert wird. Entscheiden Sie, ob die Ringe $\mathbb{Q}[x]/(x^2)$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ isomorph sind.

6. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das Element 2 unzerlegbar in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist.

7. (2+2 Punkte) Sei R ein Integritätsbereich und $a, b \in R$.
   (a) Geben Sie die Definition eines größten gemeinsamen Teilers von a und b an.
   (b) Seien nun a und b so gewählt, dass $(a) + (b) = (d) \trianglelefteq R$ für ein $d \in R$ gilt. Zeigen Sie, dass d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ist.

Die Scheinklausur wird in den Übungen am 31.01.2022 besprochen.
Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!