Wintersemester 2021/22
Montag, 07.02.2022
Aufgabenblatt 15

**Aufgaben zur Vorlesung:**
**Algebra**

## Übungsaufgaben zu Kapitel 7.

1. Bestimmen Sie für die folgenden Elemente aus $\mathbb{C}$ das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$.
   (a) $\sqrt[4]{2}i$
   (b) $e^{\frac{2\pi i}{5}}$
   (c) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

2. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$$
und geben Sie eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum an. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ gilt und bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ sowie über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Sind die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ isomorph?

3. Sei $L/K$ eine endliche Körpererweiterung.
   (a) Sei $\alpha \in L$ mit Minimalpolynom $\mu_\alpha$ über $K$. Zeigen Sie, dass $\deg(\mu_\alpha)$ ein Teiler vom Grad der Körpererweiterung $L/K$ ist.
   (b) Sei $[L : K] = p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$ für jedes $\alpha \in L \setminus K$.

4. Seien $K \leq L \leq M$ Körper. Zeigen Sie, dass $M/K$ algebraisch ist genau dann, wenn $M/L$ und $L/K$ algebraisch sind.

*Lösungen zu den Aufgaben werden in der ersten Sprechstunde zur Prüfungsvorbereitung am 17. März 2022 besprochen. Genauere Informationen zu den Sprechstunden finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:*

*https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html*