Wintersemester 2021/22
Montag, 17.01.2022
Aufgabenblatt 12

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Zeigen Sie, dass $I = (2, x)$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[x]$ ist.
2. Zeigen Sie, dass Hauptideale in $\mathbb{Z}[x]$ nicht maximal sein können.
3. Bestimmen Sie alle maximalen Ideale und Primideale von $\mathbb{Z}_{18}$.
4. Entscheiden Sie, ob Summen und Schnitte von Primidealen wieder Primideale sind.
5. Sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus kommutativer Ringe und $I \trianglelefteq S$ Primideal. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(I) \trianglelefteq R$ Primideal ist. Folgt aus I maximal $f^{-1}(I)$ maximal?

Schriftliche Aufgaben.

6. Wir wollen in dieser Aufgabe die unzerlegbaren Elemente im Hauptidealring $\mathbb{Z}[i]$ klassifizieren. Sei $N\colon \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit $a + bi \mapsto a^2 + b^2$. Wir wissen bereits, dass die Funktion N multiplikativ ist und $\mathbb{Z}[i]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[i] \mid N(x) = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) (2 Punkte) Ist $x \in \mathbb{Z}[i]$ mit $N(x) = p$ für eine Primzahl p, so ist x unzerlegbar. Ist andererseits $x \in \mathbb{Z}[i]$ unzerlegbar, so gibt es eine Primzahl p mit $x|p$ in $\mathbb{Z}[i]$. Hinweis: Es gilt $x|N(x)$ in $\mathbb{Z}[i]$.
   (b) (3 Punkte) Ist p eine Primzahl, dann ist p unzerlegbar in $\mathbb{Z}[i]$ genau dann, wenn p nicht Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen ist. Folgern Sie, dass p mit $p \equiv 3 \mod 4$ unzerlegbar in $\mathbb{Z}[i]$ ist.
   (c) (2 Punkte) Ist p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \mod 4$, so ist p zerlegbar in $\mathbb{Z}[i]$. Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $p|n^2 + 1$ gibt.
   (d) (3 Punkte) Ist $x \in \mathbb{Z}[i]$ unzerlegbar, so ist x bis auf Multiplikation mit einer Einheit von der Form
      - $x = 1 + i$
      - $x = p$ für eine Primzahl p mit $p \equiv 3 \mod 4$
      - $x = a \pm bi$ für eine Primzahl $p = a^2 + b^2$ mit $p \equiv 1 \mod 4$.

      Entscheiden Sie konkret, ob die Elemente $2, 7$ und 89 unzerlegbar in $\mathbb{Z}[i]$ sind. Geben Sie gegebenenfalls eine Zerlegung in unzerlegbare Elemente an.

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 24.01.2022 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html