Wintersemester 2021/22
Montag, 10.01.2022
Aufgabenblatt 11

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Finden Sie einen Unterring von $\mathbb{C}$, der isomorph zum Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[i]$ ist.
2. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Einheiten im Polynomring $\mathbb{Z}_4[x]$ gibt.
3. Entscheiden Sie jeweils, ob $\mathbb{Z}$ mit den folgenden Funktionen $\delta_i \colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ ein euklidischer Ring ist:
$$\delta_1(n) := |n-1| \qquad \delta_2(n) := \begin{cases} n & , n > 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases} \qquad \delta_3(n) := \begin{cases} |n| & , n \neq 2 \\ 3 & , n = 2 \end{cases}$$
Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Sei R ein euklidischer Ring mit Gradfunktion $\delta \colon R \setminus \{0_R\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass jedes Element $r \in R \setminus \{0_R\}$ mit $\delta(r)$ minimal eine Einheit ist. Sei umgekehrt $r \in R^\times$. Ist $\delta(r)$ dann notwendigerweise minimal?
5. Zeigen Sie, dass das Ideal $I := (2, \sqrt{-4})$ kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]$ ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]$ kein euklidischer Ring ist.

Schriftliche Aufgaben.

6. (3 Punkte) Sei R ein Integritätsbereich und sei $i \colon R \longrightarrow \operatorname{Quot}(R)$ die kanonische Einbettung in seinen Quotientenkörper. Sei weiter $\phi \colon R \longrightarrow K$ ein injektiver Ringhomomorphismus in einen Körper K. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\phi' \colon \operatorname{Quot}(R) \longrightarrow K$ mit $\phi = \phi' i$ gibt.
7. (4 Punkte) Seien $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit
$$f = x^4 + x^3 + x + 1 \quad \text{und} \quad g = x^2 - 1.$$
Bestimmen Sie $q, r \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ und $f = qg + r$, sowie ein Polynom maximalen Grades in $\mathbb{R}[x]$, das sowohl f als auch g teilt. Entscheiden Sie, ob $f + (g)$ in $\mathbb{R}[x]/(g)$ invertierbar ist.
8. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Funktion
$$\delta \colon \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \text{ mit } a + b\sqrt{-2} \mapsto a^2 + 2b^2.$$

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 17.01.2022 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html