

**Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra**

Weihnachtsblatt

Aufgaben zur Wiederholung.

1. Sei G die Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, die von den Matrizen

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Bestimmen Sie die Ordnung von g , h und gh . Zeigen Sie, dass $|G| = 12$. Zu welcher uns bereits bekannten Gruppe ist G isomorph?

2. Geben Sie eine Kompositionsreihe der symmetrischen Gruppe S_4 an. Bestimmen Sie zudem eine Gruppe G , die nicht isomorph zu S_4 ist, jedoch bis auf Isomorphie die selben Kompositionsfaktoren hat.
3. Zeigen Sie, dass für Primzahlen p, q eine Gruppe der Ordnung pq nicht einfach ist.
4. Entscheiden Sie, welche der Einheitsgruppen $\mathbb{Z}_{15}^\times, \mathbb{Z}_{20}^\times$ und \mathbb{Z}_{24}^\times zueinander isomorph sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Sei R ein nicht-trivialer kommutativer Ring. Für ein Element $r \in R$ sei $L_r: R \rightarrow R$ die Abbildung mit $x \mapsto rx$. Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist genau dann, wenn L_r für alle $r \neq 0_R$ injektiv ist. Folgt aus L_r surjektiv stets L_r injektiv?

Etwas zum Knobeln.

6. Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Bahnen bezüglich dieser Operation gegeben ist durch

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g|,$$

wobei $X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ die Fixpunktmenge von $g \in G$ ist.

7. Wir betrachten Spielkarten mit 16 Feldern (siehe Abbildung). Jedes Feld soll entweder blau oder rot gefärbt werden. Wieviele verschiedene Karten erhalten wir? Zwei Karten sind dabei identisch, wenn sie durch Drehung ineinander überführt werden können. Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 6.



Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage!

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind freiwillige Übungsaufgaben, die in Ihrer Übungsgruppe am 10.1.2022 besprochen werden. Die Aufgaben können in dieser Übung auch votiert werden. Die dadurch erzielten Votierpunkte zählen als Bonuspunkte. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:

<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html>