Wintersemester 2021/22
Montag, 13.12.2021
Aufgabenblatt 9

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes, dass für $n \geq 2$ die Ringe $\mathbb{Z}[x]/(n)$ und $\mathbb{Z}_n[x]$ isomorph sind.
2. Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist genau dann, wenn jeder Ringhomomorphismus $R \longrightarrow S$ mit $S \neq \{0\}$ injektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ unendlich viele Einheiten besitzt. Ist die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ zyklisch?
4. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $A \in M_n(K) \setminus \{0\}$ Nullteiler ist genau dann, wenn $\det(A) = 0$.
5. Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass zwei Hauptideale $I = (r)$ und $J = (s)$ in R genau dann übereinstimmen, wenn es ein Element $a \in R^\times$ mit $s = ar$ gibt.

Schriftliche Aufgaben.

6. (3 Punkte) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{Z}$ mit
$$x \equiv 1 \mod 5$$
$$x \equiv 2 \mod 7$$
$$x \equiv 3 \mod 11$$
und erklären Sie dabei Ihr Vorgehen.
7. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sowie einen Nullteiler vom Quotientenring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(2)$. Bestimmen Sie zudem ein Ideal $(2) \subseteq I \trianglelefteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, sodass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/I$ ein Integritätsbereich ist.
8. (3 Punkte) Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie, dass
$$\varphi(p^s) = p^s\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)$$
für $s \in \mathbb{N}$ und eine Primzahl p. Folgern Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ prim}}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)$$
Berechnen Sie $\varphi(792)$.

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 20.12.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html