Wintersemester 2021/22
Montag, 6.12.2021
Aufgabenblatt 8

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Sei R ein kommutativer Ring und $X \neq \emptyset$ eine Menge. Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathrm{Abb}(X,R) := \{f\colon X \longrightarrow R \mid f \text{ Abbildung}\}$$
mit Hilfe der Verknüpfungen $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$ für $f,g \in \mathrm{Abb}(X,R)$ und $x \in X$ ein Ring ist.
2. Entscheiden Sie, ob der Ring $\mathrm{Abb}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_4$, zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oder zu keinem von beiden ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Sei $\mathrm{End}(\mathbb{Z})$ der Endomorphismenring der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathrm{End}(\mathbb{Z})$ und $\mathbb{Z}$ isomorph sind.
4. Sei $R = M_n(K)$ für einen Körper K und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $I \trianglelefteq_2 R$ gilt:
$$I = \{0_R\} \text{ oder } I = R.$$
5. Bestimmen Sie die Quotientenringe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/(\sqrt{2})$.

Schriftliche Aufgaben.

6. (3 Punkte) Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ gibt. Gibt es auch stets einen Ringhomomorphismus $R \longrightarrow \mathbb{Z}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
7. (4 Punkte) Sei R ein Ring. Seien $I, J \trianglelefteq_l R$ Linksideale und $S \leq R$ ein Unterring. Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$(I : J) := \{r \in R \mid rj \in I \ \forall j \in J\} \trianglelefteq_l R$$
$$I \trianglelefteq_2 R \Rightarrow I + S \leq R$$
Sind auch $I \cup J$ und $IJ := \{ij \mid i \in I, j \in J\}$ Linksideale in R? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch Angabe eines Beweises oder Gegenbeispiels.
8. (3 Punkte) Entscheiden Sie, welche der folgenden Ringe isomorph sind:
$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2-1), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2), \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 13.12.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html