Wintersemester 2021/22
Montag, 29.11.2021
Aufgabenblatt 7

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Sei G eine Gruppe mit $|G| = p^2$ für eine Primzahl p. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
2. Zeigen Sie, dass jede p-Gruppe auflösbar ist.
3. Bestimmen Sie alle p-Sylowuntergruppen der symmetrischen Gruppe S_4.
4. Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 200 nicht einfach sein kann.
5. Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$. Sei S_H eine p-Sylowuntergruppe von H. Zeigen Sie, dass es eine p-Sylowuntergruppe S von G mit $S_H = S \cap H$ gibt.

Schriftliche Aufgaben.

6. Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Wir nennen $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ den *Normalisator* von H in G.
   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $N_G(H)$ bezüglich Inklusion die größte Untergruppe von G ist, in der H Normalteiler ist.
   (b) (4 Punkte) Sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ mit p Primzahl. Bestimmen Sie den Normalisator der p-Sylowuntergruppe
   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & a \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_p \right\} \leq G.$$
   Dieser Normalisator ist genau der Stabilisator von H bezüglich der Operation von G auf $\mathrm{Syl}_p(G)$ durch Konjugation. Nutzen Sie dieses Wissen, um die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von G zu bestimmen.
7. (2 Punkte) Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168. Wieviele Elemente der Ordnung 7 gibt es in G?
8. (2 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe und $H \trianglelefteq G$ mit $|H| = p$ für eine Primzahl p. Zeigen Sie, dass H in jeder p-Sylowuntergruppe von G enthalten ist.

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 6.12.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html