

**Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra**

Mündliche Aufgaben.

1. Die orthogonale Gruppe $O_3(\mathbb{R})$ operiert auf dem \mathbb{R}^3 durch Matrizenmultiplikation. Bestimmen Sie sowohl die Bahn von $x \in \mathbb{R}^3$ unter $O_3(\mathbb{R})$ als auch den Stabilisator vom Einheitsvektor $e_3 \in \mathbb{R}^3$.
2. Sei G eine endliche Gruppe und $M = \{1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei X die Menge aller Abbildungen von G nach M .
 - (a) Zeigen Sie, dass G mittels der folgenden Zuordnung auf X operiert:
$$(g, \phi) \mapsto (g' \mapsto \phi(g'g))$$
mit $g, g' \in G$ und $\phi \in X$. Was sind die Fixpunkte dieser Operation?
 - (b) Sei $H \leq G$ und $n > 1$. Zeigen Sie, dass ein Element ϕ in X existiert, sodass
$$H = \text{Stab}_G(\phi).$$
3. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 55$, die auf einer Menge X mit $|X| = 39$ operiert. Zeigen Sie, dass die Operation mindestens einen Fixpunkt hat.
4. Bestimmen Sie die Klassengleichung für die Diedergruppe D_4 .

Schriftliche Aufgaben.

5. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ sei
$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$$
und $K(G)$ die von der Menge $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$ erzeugte Untergruppe. Diese heißt *Kommutatorgruppe* von G .
 - (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $K(G) \trianglelefteq G$. Zeigen Sie zudem, dass für $N \trianglelefteq G$ gilt:
$$G/N \text{ abelsch} \Leftrightarrow K(G) \subseteq N.$$
 - (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe der symmetrischen Gruppe S_n mit $n \in \mathbb{N}$ und der alternierenden Gruppe A_4 .
 - (c) (3 Punkte) Definiere $K_0(G) := G$ und $K_n(G) := K(K_{n-1}(G))$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppe $K_n(G)$ heißt *n-te Kommutatorgruppe* von G . Zeigen Sie, dass G auflösbar ist genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K_n(G) = \{1_G\}$ existiert.
6. (2 Punkte) Finden Sie ein Beispiel einer treuen Gruppenoperation, für die nicht alle Stabilisatoren trivial sind.

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 29.11.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:

<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html>