Wintersemester 2021/22
Montag, 15.11.2021
Aufgabenblatt 5

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes für endlich erzeugte abelsche Gruppen aus der Vorlesung, dass es eine Folge natürlicher Zahlen $1 < n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_s$ mit $n_1 \mid n_2 \mid ... \mid n_s$ gibt, sodass
$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_s}.$$
Hinweis: Das allgemeine Vorgehen kann anhand eines Beispiels erklärt werden.
2. Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem minimaler Länge und ein Element maximaler Ordnung für die Gruppe
$$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5.$$
3. Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$. Ist G dann notwendigerweise isomorph zu einem semidirekten Produkt von N und G/N? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Bestimmen Sie eine Kompositionsreihe der Diedergruppe D_{12}.
5. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ keine Kompositionsreihe hat.

Schriftliche Aufgaben.

6. (2 Punkte) Finden Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 16.
7. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe A_n der einzige nichttriviale Normalteiler von S_n ist.
8. (2 Punkte) Sei G eine Gruppe, für die eine Kompositionsreihe existiert, und $H \trianglelefteq G$. Zeigen Sie, dass auch für H eine Kompositionsreihe existiert.
9. (2 Punkte) Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen von $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.
10. (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Kompositionsreihe für die Matrixgruppe
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 22.11.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html