Wintersemester 2021/22
Montag, 8.11.2021
Aufgabenblatt 4

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Gegeben seien zwei Gruppen G und H sowie ein Gruppenhomomorphismus
$$\phi\colon H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G).$$
Zeigen Sie, dass $G \times H$ durch die Verknüpfung
$$(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) = (g_1\phi(h_1)(g_2), h_1h_2)$$
zu einer Gruppe wird. Diese Gruppe heißt semidirektes Produkt von G und H bezüglich ϕ. Wir schreiben $G \rtimes_\phi H$.
2. Zeigen Sie, dass die Diedergruppe D_n mit $n \geq 3$ isomorph zu einem semidirekten Produkt von $\mathbb{Z}_n$ und $\mathbb{Z}_2$ ist.
3. Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n mit $n \geq 3$ von der Menge aller Zykel der Länge 3 erzeugt wird.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht isomorph zu einer echten Untergruppe von sich selbst ist.
5. Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung hat.

Schriftliche Aufgaben.

6. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, sodass für alle $N \leq H \leq G$ gilt:
$$H = N \text{ oder } H = G.$$
Seien weiter $H_1, H_2 \leq G$ mit $H_1, H_2 \neq \{1_G\}$ und $H_1 \cap N = H_2 \cap N = \{1_G\}$.
Zeigen Sie, dass $H_1 \cong H_2$. Geben Sie zudem ein Beispiel an, in dem die obigen Voraussetzungen erfüllt sind.
7. (4 Punkte) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ zyklisch ist genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.
8. (2 Punkte) Bestimmen Sie σ^{2021} für die Permutation $\sigma \in S_8$ mit
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 15.11.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html