Wintersemester 2021/22
Montag, 1.11.2021
Aufgabenblatt 3

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Mündliche Aufgaben.

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch Angabe eines Beweises oder Gegenbeispiels.
   (a) Sei G eine Gruppe und $H_1, H_2 \leq G$. Dann ist
   $$H_1H_2 = \{h_1h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$
   eine Untergruppe von G.
   (b) Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Wenn die Zuordnung
   $$(g_1H, g_2H) \mapsto (g_1g_2)H$$
   eine wohldefinierte Abbildung $G/H \times G/H \longrightarrow G/H$ induziert, dann gilt $H \trianglelefteq G$.
   (c) Sei G eine Gruppe und $H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq G$. Dann gilt auch $H_1 \trianglelefteq G$.
   (d) Die Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat unendlich viele Elemente.
   (e) Die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind isomorph.

Schriftliche Aufgaben.

2. Gegeben sind die symmetrische Gruppe S_4 und die alternierende Gruppe $A_4 \leq S_4$.
   (a) (2 Punkte) Schreiben Sie alle Elemente von A_4 in Zykelnotation als Komposition von Transpositionen.
   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $V_4 = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ eine normale Untergruppe von S_4 (und somit auch von A_4) ist.
   (c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe U der Ordnung 6 enthält. Hinweis: Betrachten Sie mögliche Schnitte der Form $U \cap V_4$.
   (d) (3 Punkte) Zeigen Sie den Isomorphismus
   $$S_4/V_4 \cong S_3.$$
   Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $S_4 \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_4)$ mit
   $$\sigma \mapsto (\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}).$$
   Nutzen Sie den Homomorphiesatz.

Lösungen zu den schriftlichen Aufgaben können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 8.11.2021 abgeben. In dieser Übung werden auch die mündlichen Aufgaben dieses Blattes besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html