Wintersemester 2021/22
Montag, 25.10.2021
Aufgabenblatt 2

Aufgaben zur Vorlesung:
Algebra

Schriftliche Aufgaben.

1. Sei G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist definiert als
$$Z(G) = \{g \in G \mid ga = ag \ \forall a \in G\}.$$
   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.
   (b) (3 Punkte) Sei G' eine weitere Gruppe. Zeigen Sie, dass
   $$Z(G \times G') = Z(G) \times Z(G').$$
   Ist jede Untergruppe von $G \times G'$ von der Form $H \times H'$ für Untergruppen $H \leq G$ und $H' \leq G'$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n für $n \in \mathbb{N}$.

2. Sei G eine Gruppe. Mit $\mathrm{Aut}(G)$ bezeichnen wir die Menge aller bijektiven Gruppenhomomorphismen von G nach G. Diese nennen wir auch *Automorphismen*. Zudem sei $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Automorphismen, die durch Konjugation mit einem Element g aus G entstehen, also von der Form sind:
$$C_g \colon G \longrightarrow G \ \text{ mit } \ h \mapsto ghg^{-1}$$
   Diese nennen wir auch *innere Automorphismen*.
   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_G ist.
   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ ist. Ist $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (c) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\mathrm{Inn}(G)$ und $\mathrm{Aut}(G)$ für $G = S_2 \times S_2$.

Lösungen zu den Aufgaben können bis zum 1.11.2021 um 14 Uhr über Ilias abgegeben werden. Laden Sie diese als pdf-Datei (Name.pdf) in Ihrer Gruppe im Kurs Algebra (Übung) als Abgabe zu Blatt 2 hoch. Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen am 8.11.2021 besprochen. Weitere Informationen finden Sie in Ilias bzw. auf der Homepage der Vorlesung:
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/WS21-22Algebra/algebra.html