Rationale Zahlen und Figuren

1 Rationale Haken

Ein Diagramm wie das Folgende ist durch zwei positive ganze Zahlen festgelegt: die konstante Zeilensumme $a = 17$ und die konstante Spaltensumme $b = 7$.

														3	7	7
												6	7	4		
									2	7	7	1				
							5	7	5							
				1	7	7	2									
		4	7	6												
7	7	3														

Bemerkenswert: Auch die geometrische Form solch eines “magischen Hakens” ist durch a und b eindeutig festgelegt!

Die Gestalt des Hakens hängt jedoch nur von dem Verhältnis $a : b$, d. h. von der rationalen Zahl $\rho = \frac{a}{b}$, ab. Wir sprechen daher von einem rationalen Haken H_ρ. Es gilt:

Satz 1. *Jede rationale Zahl $\rho > 0$ ist geometrisch durch einen rationalen Haken H_ρ darstellbar, und dieser bestimmt die rationale Zahl ρ eindeutig.*

2 Weitere Eigenschaften

Im folgenden seien a und b stets positiv und teilerfremd gewählt. Dann gilt:

$H_{8/3} =$

					2	3	3
		1	3	3	1		
3	3	2					

3

8

- Die Zahl a ist die Länge, b die Breite des Hakens.
- Vertauscht man a und b, so wird der Haken an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt.
- Jeder rationale Haken ist punktsymmetrisch.
- Ganze Haken sind durch $b = 1$ gekennzeichnet, z. B.:

$H_7 =$

1	1	1	1	1	1	1

- Ist $a, b \neq 1$, so enthalten genau zwei Felder die Zahl 1.

Diese beiden 1-Felder sollen nun näher betrachtet werden.

3 Eindeutige Aufspaltung

Entfernt man eines der beiden 1-Felder, so erhält man zwei rationale Haken. Nur die 1-Felder haben diese Eigenschaft! Da die 1-Felder symmetrisch liegen, entsteht somit jeder rationale Haken $H_{a/b}$ aus zwei eindeutig bestimmten kleineren rationalen Haken H_{a_1/b_1} und H_{a_2/b_2}, wobei

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2.$$

Wie hängt dabei die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ von $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ ab?

Ganz einfach! Es gilt:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}$$

Arithmetisch ergibt sich die Aufspaltung im Fall $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2}$ aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Folgerung. *Jede rationale Zahl $\rho > 0$ hat einen Stammbaum: Als Haken betrachtet läßt sie sich eindeutig als Summe zweier kleinerer rationaler Zahlen schreiben, so daß obige Determinantengleichung gilt. So kann man fortfahren, bis die Zahl ρ völlig auf ganze Zahlen zurückgeführt ist!*

4 Durchgehende Numerierung

Rationale Haken lassen sich auch fortlaufend numerieren:

Satz 2. *Ein rationaler Haken $H_{a/b}$ mit n Feldern besitzt eine eindeutige Numerierung von 1 bis n derart, daß für benachbarte Felder die Differenz gleich a bzw. b ist, je nachdem die Felder übereinander oder nebeneinander liegen.*

														3	10	17
												6	13	20		
									2	9	16	23				
							5	12	19							
				1	8	15	22									
		4	11	18												
7	14	21														

$$H_{17/7} = H_{5/2} + H_{12/5}$$

Das vorstehende Beispiel zeigt außerdem, daß die Zahlen a und b in den Feldern am Anfang und Ende des Hakens stehen! Ferner illustriert das Beispiel den

Satz 3. *Geometrisch liegt ein rationaler Haken genau dann vor, wenn die Strecke vom linken unteren bis zum rechten oberen Ende ganz innerhalb des Hakens verläuft.*

5 Eindimensionale Quasi-Kristalle

Einer irrationalen Zahl $\rho > 0$ entspricht ein unendlicher Haken, der sich aus senkrechten und waagerechten Teilstücken zusammensetzt. Für bestimmte ρ liefert die Projektion auf die innere Linie eine Zerlegung der Zahlengeraden in Intervalle zweier verschiedener Längen: ein Quasi-Kristall! Die Aufteilung in kurze und lange Intervalle ergibt sich aus einer Substitutionsregel (Kalkül).

Ansprechpartner: Prof. W. Rump, Telefon: (0711) 685-65516
E-Mail: rump@mathematik.uni-stuttgart.de