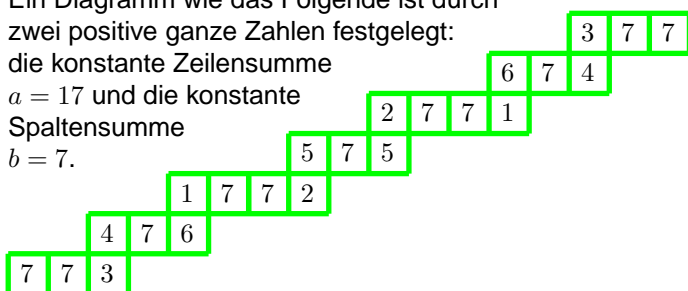


## 1 Rationale Haken

Ein Diagramm wie das Folgende ist durch zwei positive ganze Zahlen festgelegt: die konstante Zeilensumme  $a = 17$  und die konstante Spaltensumme  $b = 7$ .



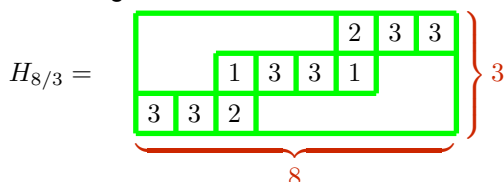
Bemerkenswert: Auch die geometrische Form solch eines "magischen Hakens" ist durch  $a$  und  $b$  eindeutig festgelegt!

Die Gestalt des Hakens hängt jedoch nur von dem Verhältnis  $a : b$ , d. h. von der rationalen Zahl  $\rho = \frac{a}{b}$ , ab. Wir sprechen daher von einem **rationalen Haken**  $H_\rho$ . Es gilt:

**Satz 1.** Jede rationale Zahl  $\rho > 0$  ist geometrisch durch einen rationalen Haken  $H_\rho$  darstellbar, und dieser bestimmt die rationale Zahl  $\rho$  eindeutig.

## 2 Weitere Eigenschaften

Im folgenden seien  $a$  und  $b$  stets positiv und teilerfremd gewählt. Dann gilt:



- Die Zahl  $a$  ist die Länge,  $b$  die Breite des Hakens.
- Vertauscht man  $a$  und  $b$ , so wird der Haken an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt.
- Jeder rationale Haken ist punktsymmetrisch.
- Ganze Haken sind durch  $b = 1$  gekennzeichnet, z. B.:

$$H_7 = \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- Ist  $a, b \neq 1$ , so enthalten genau zwei Felder die Zahl 1.

Diese beiden **1-Felder** sollen nun näher betrachtet werden.

## 3 Eindeutige Aufspaltung

Entfernt man eines der beiden 1-Felder, so erhält man zwei rationale Haken. Nur die 1-Felder haben diese Eigenschaft! Da die 1-Felder symmetrisch liegen, entsteht somit jeder rationale Haken  $H_{a/b}$  aus zwei eindeutig bestimmten kleineren rationalen Haken  $H_{a_1/b_1}$  und  $H_{a_2/b_2}$ , wobei

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2.$$

Wie hängt dabei die rationale Zahl  $\frac{a}{b}$  von  $\frac{a_1}{b_1}$  und  $\frac{a_2}{b_2}$  ab?

Ganz einfach! Es gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}$$

Arithmetisch ergibt sich die Aufspaltung im Fall  $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2}$  aus der Gleichung:

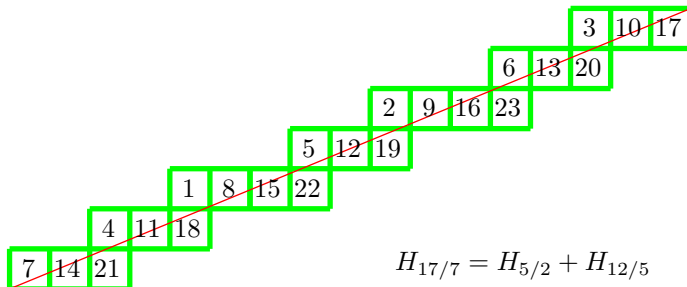
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$

**Folgerung.** Jede rationale Zahl  $\rho > 0$  hat einen Stammbaum: Als Haken betrachtet läßt sie sich eindeutig als Summe zweier kleinerer rationaler Zahlen schreiben, so daß obige Determinantengleichung gilt. So kann man fortfahren, bis die Zahl  $\rho$  völlig auf ganze Zahlen zurückgeführt ist!

## 4 Durchgehende Numerierung

Rationale Haken lassen sich auch fortlaufend numerieren:

**Satz 2.** Ein rationaler Haken  $H_{a/b}$  mit  $n$  Feldern besitzt eine eindeutige Numerierung von 1 bis  $n$  derart, daß für benachbarte Felder die Differenz gleich  $a$  bzw.  $b$  ist, je nachdem die Felder übereinander oder nebeneinander liegen.



Das vorstehende Beispiel zeigt außerdem, daß die Zahlen  $a$  und  $b$  in den Feldern am Anfang und Ende des Hakens stehen! Ferner illustriert das Beispiel den

**Satz 3.** Geometrisch liegt ein rationaler Haken genau dann vor, wenn die Strecke vom linken unteren bis zum rechten oberen Ende ganz innerhalb des Hakens verläuft.

## 5 Eindimensionale Quasi-Kristalle

Einer irrationalen Zahl  $\rho > 0$  entspricht ein unendlicher Haken, der sich aus senkrechten und waagerechten Teilstücken zusammensetzt. Für bestimmte  $\rho$  liefert die Projektion auf die innere Linie eine Zerlegung der Zahlengeraden in Intervalle zweier verschiedener Längen: ein Quasi-Kristall! Die Aufteilung in kurze und lange Intervalle ergibt sich aus einer Substitutionsregel (Kalkül).