Beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenzen und derivierte Äquivalenzen

Diplomarbeit

von

Inga Benner

angefertigt am Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Herrn Prof. Dr. Steffen Koenig

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Stuttgart, den 26. November 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Darstellungstheorie wird untersucht, wie komplizierte algebraische Strukturen einfacher dargestellt werden können. Genauer versucht man eine algebraische Struktur so darzustellen, dass Lineare Algebra anwendbar wird. Man führt Gruppen und Algebren auf Matrizenringe zurück, mit denen es im Allgemeinen viel einfacher ist zu rechnen. Die invertierbaren $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe, beliebige $n \times n$-Matrizen bilden eine assoziative Algebra und durch Multiplikation $M * N := MN - NM$ wird aus der Menge der $n \times n$-Matrizen eine Lie-Algebra. Eine Darstellung ebendieser Strukturen ist ein Gruppen- beziehungsweise (Lie-)Algebrenhomomorphismus, der diesen Strukturen Matrizenräume zuordnet.
Die Kipptheorie hat eine ähnliche Motivation: Hier wird untersucht, inwiefern sich die Modulkategorie eines Rings mit der eines anderen Rings vergleichen lässt. Gilt $\Gamma \simeq End_\Lambda(T)$ für zwei Ringe Λ und Γ und einen Λ-Kippmodul T, oder allgemeiner einen Kippkomplex T von Λ-Moduln, so sind nach Rickards Theorem die beschränkten derivierten Kategorien von Λ-Mod und Γ-Mod äquivalent als triangulierte Kategorien. Derivierte Äquivalenz berücksichtigt viele Invarianten, wie etwa die Anzahl der irreduziblen Moduln oder die Endlichkeit der globalen Dimension. Daher versucht man komplizierte Ringe zu besser bekannten Ringen zu „kippen", um Informationen über diese Invarianten zu erhalten.

In [5] stellen Wei Hu und Changchang Xi eine Verbindung zwischen Auslander-Reiten-Sequenzen, einem wesentlichen Konstrukt in der Darstellungstheorie von Artin-Algebren, und derivierter Äquivalenz her. Auslander-Reiten-Sequenzen werden verallgemeinert zu beinahe $\mathscr{D}$-zerfallenden Sequenzen, die wiederum ein Spezialfall der längeren Sequenzen $X \xrightarrow{\psi} M_1 \to \cdots \to M_n \xrightarrow{\varphi} Y$ mit ψ links- und φ rechts-$\mathscr{D}$-Approximation von M und $M_i \in add(M)\ \forall i$ aus Theorem 1 (entspricht Lemma 3.4 in [5]) sind. Aus den Sequenzen wird dann die derivierte Äquivalenz der Endomorphismenringe $End(X \oplus M)$ und $End(M \oplus Y)$ gefolgert. Damit kann man die teilweise aufwendige oder gar unmögliche Suche nach einem Kippkomplex umgehen, indem man stattdessen diese Art von Sequenzen konstruiert.

Mein Ziel ist es nun, dieses Ergebnis zu ringtheoretisieren: Rickards Theorem, welches den Grundstein für das Studium derivierter Äquivalenzen als

Verallgemeinerung der Morita-Theorie legt, behandelt die Frage, wann zwei Ringe deriviert äquivalent sind. Da Hu und Xi Auslander-Reiten-Theorie und Kipptheorie verbinden wollten, sind ihre Ergebnisse hauptsächlich für Artin-Algebren formuliert. Doch auch für die derivierte Äquivalenz von Ringen sind ihre Ergebnisse nützlich.
Für einen unitären Ring R mit paarweise orthogonalen Idempotenten e, f, g werde ich Bedingungen aufstellen, wann die Ringe $(e+g)R(e+g)$ und $(f+g)R(f+g)$ deriviert äquivalent sind. Diese Bedingungen habe ich von den Bedingungen aus Theorem 1 abgeleitet. Ich werde sogar zeigen, dass beide Aussagen äquivalent sind.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt: Zuerst gebe ich die wichtigsten Definitionen und Sätze, die dieser Arbeit zugrundegelegt sind, an. Einem Studenten im Hauptstudium mit algebraischen Vorkenntnissen sollte dies zum Verständnis der Arbeit ausreichen. Wer sich jedoch schon mit der Darstellungstheorie von Köchern und derivierten Äquivalenzen beschäftigt hat, kann Kapitel 2 ohne Weiteres überspringen und nur die ihm unbekannten Definitionen nachschlagen.
Im dritten Kapitel werde ich dann die wichtigsten Ergebnisse von Wei Hu und Changchang Xi zitieren und an einem vermeintlich simplen Beispiel die Aussagekraft der Ergebnisse untersuchen. Im vierten Teil werde ich einige Notationen einführen und eine ringtheoretische Version des Theorems formulieren. Dieses Theorem ist ein Korollar aus dem Theorem von Hu und Xi. Ich werde jedoch auch einen eigenständigen Beweis angeben, der dem Beweis von Theorem 1 angelehnt ist. Als letzten Schritt zeige ich, dass auch Theorem 1 aus der ringtheoretischen Version gefolgert werden kann, und die beiden Versionen damit äquivalent sind. Es folgen einige Beispiele dafür, wie Theorem 3 für die derivierte Äquivalenz von Köchern eingesetzt werden kann. In Kapitel 5 bringe ich dies mit Ein-Punkt-Erweiterungen in Verbindung und öffne damit einem neuen Anwendungsgebiet die Tür.

2 Definitionen

Das Basiswissen aus einer Algebravorlesung wird vorausgesetzt, alles Weitere ist im Folgenden definiert.

2.1 Ringe, Algebren und Moduln

Mit R wird hier immer ein Ring mit Einselement 1 bezeichnet. A sei stets eine Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k.

Definition 1 (Modul)**.** *Sei R ein Ring mit 1. Ein **R-Linksmodul** ist eine additive Gruppe $(M, +)$, die mit der Multiplikation von R verträglich ist so dass $\forall\ r, s \in R$ und $m, n \in M$ gilt*

(i) $r(m + n) = rm + rn$

(ii) $(r + s)m = rm + sm$

(iii) $(rs)m = r(sm)$

(iv) $1_R m = m$

Ist R eine k-Algebra, so hat M sogar eine Vektorraumstruktur und es gilt zusätzlich:

(v) $(r\lambda)m = r(\lambda m) = \lambda(rm)\ \forall\ \lambda \in k$

Rechtsmoduln sind analog definiert.

Notation. Im Folgenden ist ein Modul immer ein Linksmodul.

Definition 2 (unzerlegbarer Modul)**.** *Ein Modul $M \neq 0$ heißt **unzerlegbar**, wenn er nicht als direkte Summe von nicht-trivialen Untermoduln geschrieben werden kann. Die direkte Summe von Moduln ist die direkte Summe der additiven Gruppen beziehungsweise Vektorräume mit Multiplikation $r*(m_1, ..., m_k) := (rm_1, ..., rm_k)$ für $(m_1, ..., m_k) \in \bigoplus_{j=1}^{k} M_j$ und $r \in R$.*

Definition 3 (einfacher Modul)**.** *Ein **einfacher** Modul ist ein Modul $\neq 0$, dessen einziger Untermodul 0 ist.*

Definition 4 (Jacobsonradikal)**.** *Sei M ein Modul. Dann wird mit $rad(M)$ der Schnitt aller maximalen Teilmoduln von M bezeichnet. $rad(M)$ wird **(Jacobson-)Radikal** von M genannt.*

Definition 5 (freie, projektive und injektive Moduln)**.** *Ein Modul F heißt **frei**, wenn er eine R-Basis hat. Äquivalent dazu ist, dass F isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von R ist.*

*Ein Modul P heißt **projektiv**, wenn er die folgende Eigenschaft erfüllt:*
$\forall\ f : P \to N$ und $\forall$ Epimorphismen[1] $h : M \to N\ \exists\ f' : P \to M$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn P direkter Summand eines freien Moduls ist.

*Ein Modul I heißt **injektiv**, wenn für alle $g : L \to I$ und für alle Monomorphismen $k : L \to M$ ein $g' : M \to I$ existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "g"'] & M \arrow[d, "g'"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

Definition 6 (projektive Auflösung/ projektive Dimension)**.** *Sei M ein R-Modul. Eine Sequenz*
$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ *mit allen P_i projektiv, so dass die induzierte Sequenz*
$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *exakt[2] ist, heißt **projektive Auflösung** von M. Auch die induzierte Sequenz wird oft als projektive Auflösung bezeichnet.*
(Jeder Modul hat eine projektive Auflösung, siehe [1], S.26, Lemma 5.3(c).)
*Eine **minimale projektive Präsentation** ist eine exakte Sequenz*
$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *so dass P_0 projektive Decke von M und P_1 projektive Decke des Kerns von $P_0 \to M$ ist.*

[1] Siehe Definition 18.
[2] Siehe Definition 24.

*Als **projektive Decke** des Moduls N wird der projektive Modul Q bezeichnet, für den gilt: $\exists\ f : Q \to N$ surjektiv so dass $Q/rad(Q) \simeq N/rad(N)$. Eine projektive Decke ist eindeutig bis auf Isomorphie.*
*Die **projektive Dimension** $pd(M)$ eines Moduls M ist das minimale n, für das eine projektive Auflösung $0 \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$ existiert. Falls kein solches n existiert, setzte $pd(M) = \infty$.*

Definition 7 (Idempotente)**.** *Ein Element $e \in R$ nennt man **Idempotent**, falls $e^2 = e$ gilt. Ein Idempotent heißt **primitiv**, wenn es nicht in eine Summe von nicht-trivialen Idempotenten zerlegbar ist. Zwei Idempotente e, f heißen zueinander **orthogonal**, falls $ef = 0 = fe$ gilt.*
Es gibt immer eine Zerlegung $1 = e_1 + ... + e_n$ in primitive paarweise orthogonale Idempotente. Diese steht in Bijektion zu einer Zerlegung $R = Re_1 \oplus ... \oplus Re_n$ von ${}_RR$, also R als R-Linksmodul betrachtet, in unzerlegbar projektive R-Moduln.

2.2 Köcher

Die Informationen einer komplexen algebraischen Struktur sind oft leichter zu verstehen, wenn man sie auch grafisch darstellen kann. Jede endlich dimensionale basische Algebra ist isomorph zur Wegealgebra eines Köchers mit Relation (siehe [1], S.64, Theorem 3.7), die somit eine grafische Darstellung der Algebra bietet und oft leichter zu handhaben ist.

Definition 8 (Köcher)**.** *Ein **Köcher** ist ein gerichteter Graph $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, wobei Q_0 die Menge der Punkte und Q_1 die Menge der Pfeile ist. s und t sind Abbildungen von Q_1 nach Q_0: s ordnet jedem Pfeil seinen Startpunkt (start), t seinen Zielpunkt (target) zu.*
*Eine **Köcherdarstellung** X ist eine Sammlung von Vektorräumen und linearen Abbildungen, so dass jedem Punkt ein Vektorraum und jedem Pfeil eine lineare Abbildung zwischen diesen Vektorräumen zugeordnet wird. Schreibe $X = (X_i, f_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$.*
*Ein **Morphismus** ϕ zwischen Köcherdarstellungen X und Y ist eine Menge von linearen Abbildungen $\phi_i : X_i \to Y_i$, so dass das daraus entstehende Diagramm überall kommutiert.*

Beispiel 1. *$Q = \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ ist ein Köcher,*
$X = 0 \xleftarrow{0} k \xrightarrow{1} k$ und $Y = k \xleftarrow{(2,0)} k^2 \xrightarrow{(0,1)} k$ sind Köcherdarstellungen

und $\phi : X \to Y$, gegeben durch $\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, "0"] & k \arrow[l, "0"'] \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & k \arrow[d, "1"] \\ k & k^2 \arrow[l, "(2{,}0)"] \arrow[r, "(0{,}1)"'] & k \end{tikzcd}$ *, ist ein Morphismus.*

Definition 9 (Wegealgebra)**.** *Die **Wegealgebra** $A = kQ$ zu einem Köcher Q (oder die **Köcheralgebra** zu Q) ist die Algebra, deren k-Vektorraum-Basis von den Wegen in Q gebildet wird. Ein **Weg** der Länge $l \geq 1$ mit Start a und Ziel b ist eine Sequenz $\alpha = a\alpha_1 ... \alpha_l b$ mit $a =: s(\alpha)$ und $b =: t(\alpha)$ in Q_0 und $\alpha_i \in Q_1$ und $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, $t(\alpha_l) = b$. Assoziiere zu jedem Element aus Q_0 einen Weg der Länge 0. Das Produkt zweier Basisvektoren α und β ist definiert als $\alpha\beta :=$ „erst α, dann β gehen“, falls $t(\alpha) = s(\beta)$ und 0 sonst.*

Manchmal möchte man zusätzliche Bedingungen an die Wege im Köcher stellen, zum Beispiel die Komposition von α und β soll Null sein, oder zwei (unterschiedliche) Wege mit demselben Start- und Zielpunkt sollen denselben Weg repräsentieren. Dies kann man erreichen, indem man Relationen hinzunimmt:

Definition 10 (Relationen)**.** *Eine **Relation** in Q ist eine endliche Linearkombination von Wegen der Länge ≥ 2 mit gleichem Start- und Zielpunkt*[(3)]*. Etwa ist $\varrho = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \omega_j \in kQ$ eine Relation, wobei $\lambda_j \in k$ und ω_j Wege der Länge ≥ 2 sind und jedes ω_j denselben Start- und Zielpunkt hat.*

*Sei $\mathscr{R}_Q$ das Ideal in kQ, das von allen Pfeilen erzeugt wird. Ein Ideal I mit $\mathscr{R}_Q^m \subseteq I \subseteq \mathscr{R}_Q^2$ heißt **zulässiges Ideal**. Sei $\rho =< \varrho_i >_{i \in I}$ ein von Relationen erzeugtes zulässiges Ideal, dann ist Q der Köcher mit Relationen ρ und die zugehörige Wegealgebra ist kQ/ρ.*

Beispiel 2. *Sei Q der Köcher* $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet \arrow[dr, "\gamma"] & \\ \bullet \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\delta"] & & \bullet \arrow[r, "\varepsilon"] & \bullet \end{tikzcd}$ *, dann ist durch $\varrho = \alpha\beta\gamma - \delta\varepsilon$ eine Relation in Q gegeben.*

Bemerkung 1. *Wegen in Q gebildet wird. Ein **Weg***

---

(3) Der Nullweg kann überall starten und enden.

- *Die Darstellungen eines Köchers entsprechen genau den Moduln der zugehörigen Wegealgebra. Die Begriffe werden daher als gleichbedeutend gewertet.*

- *Eine endlich dimensionale Wegealgebra gehört stets zu einem azyklischen Köcher, beziehungsweise zu einem Köcher, bei dem jeder Zykel eine Relation ist.*

2.3 Kategorien

Als zusätzliches Nachschlagewerk für Kategorien empfehle ich [8], welches auch auf Deutsch erhältlich ist (hier mit dem Titel „Kategorien "). Die grundlegenden Begriffe sind aber einfacher in [1] definiert, daher werde ich die folgenden Definitionen aus [1], S.404ff, übernehmen.

Definition 11 (Kategorie). *Eine* ***Kategorie*** *ist ein Tripel* $\mathscr{C} = (Ob\mathscr{C}, Hom\mathscr{C}, \circ)$ *bestehend aus einer* ***Klasse von Objekten*** $Ob\mathscr{C}$*, einer* ***Klasse von Morphismen*** $Hom\mathscr{C}$ *und einer partiell binären Operation* $\circ$*, die* ***Komposition*** *genannt wird, so dass gilt:*

(i) jedem Paar $(X, Y) \in Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{C}$ *wird eine Menge* $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$*, die* ***Menge der Morphismen von X zu Y****, zugeordnet, so dass* $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \cap Hom_{\mathscr{C}}(V, W) = \emptyset$ *falls* $(X, Y) \neq (V, W)$ *gilt und*

(ii) für jedes Tripel $(X, Y, Z) \in Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{C}$ *ist die Operation* $\circ$ *folgendermaßen definiert:*
$\circ : Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathscr{C}}(X, Z), (g, f) \mapsto g \circ f$ *so dass gilt:*

  (a) $\circ$ *ist assoziativ und*

  (b) $\forall\, X \in Ob\mathscr{C}\ \exists\, 1_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X, X)$ *so dass* $\forall\, f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y), g \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, X)$ *gilt:* $f \circ 1_X = f$ *und* $1_X \circ g = g$.
  1_X *wird* ***Identität*** *oder* ***Identitätsmorphismus*** *genannt.*

Bemerkung 2. *Formal korrekt müsste es statt „*$X \in Ob\mathscr{C}$*" eher „X Objekt in* $\mathscr{C}$*" heißen, da* $Ob\mathscr{C}$ *eine Klasse und nicht zwangsläufig eine Menge ist*(4)*. Diese abkürzende Schreibweise hat sich allerdings eingebürgert und ist weitgehend unmissverständlich.*

(4)Siehe [8], S.21ff.

Definition 12 (Funktor)**.** *Ein **Funktor** ist eine Abbildung $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ zwischen zwei Kategorien, die jedem Objekt $X \in Ob\mathscr{C}$ ein Objekt $FX \in Ob\mathscr{D}$ und jedem Morphismus $\phi : X \to Y$ in $\mathscr{C}$ einen Morphismus $F\phi : FX \to FY$ oder $F\phi : FY \to FX$ zuordnet, so dass $F1_X = 1_{FX}$ für alle $X \in Ob\mathscr{C}$ gilt und für alle Morphismen $\phi : X \to Y$ und $\theta : Y \to Z$ in $\mathscr{C}$ gilt $F(\theta \circ \phi) = F(\theta) \circ F(\phi)$, beziehungsweise $F(\theta \circ \phi) = F(\phi) \circ F(\theta)$ falls F die Reihenfolge von X und Y vertauscht. Im ersten Fall heißt F **kovariant**, im zweiten Fall **kontravariant**.*

Bemerkung 3. *Als abkürzende Schreibweise für die Komposition zweier Morphismen wird meistens fg statt $f \circ g$ genommen. Da ich in der Köcheralgebra die Multiplikation von Wegen $\alpha\beta$ als „erst α, dann β “ definiert habe und in Kapitel 4 mehrfach die Multiplikation der Köcheralgebra mit der des Rings vergleiche, werde ich auch die Multiplikation im Ring dementsprechend anpassen. Ich definiere also $\psi\varphi := \varphi \circ \psi$ für ψ, φ Morphismen in R-Mod.*

2.3.1 Spezielle Kategorien

Definition 13 ((volle) Unterkategorie)**.** *Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie. Dann heißt die Kategorie $\mathscr{D}$ **Unterkategorie** von $\mathscr{C}$, falls gilt*

(i) $Ob\mathscr{D}$ ist eine Teilklasse von $Ob\mathscr{C}$

(ii) für $X, Y \in Ob\mathscr{D}$ ist $Hom_{\mathscr{D}}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$

(iii) die Komposition von Morphismen ist in $\mathscr{D}$ genauso definiert wie in $\mathscr{C}$

(iv) $\forall\ X \in Ob\mathscr{D}$: die Identität $1_X^{\mathscr{D}}$ in $Hom_{\mathscr{D}}(X, X)$ entspricht der Identität 1_X in $Hom_{\mathscr{C}}(X, X)$.

*Die Unterkategorie heißt **voll**, falls in (ii) Gleichheit gilt.*

Definition 14 (additive Kategorie)**.** *Die Kategorie $\mathscr{C}$ ist **additiv**, falls*

(i) endliche direkte Summen existieren: $\forall\ X_1, ..., X_n \in Ob\mathscr{C}\ \exists\ X_1 \oplus ... \oplus X_n \in Ob\mathscr{C}$

(ii) die Morphismenmengen $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ für beliebige $X, Y \in Ob\mathscr{C}$ die Struktur einer abelschen Gruppe aufweisen

(iii) *die Komposition von Morphismen für alle Tripel* $(X, Y, Z) \in Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{C}$ *bilinear ist, also* $(f+f')\circ g = f\circ g + f'\circ g$ *und* $f\circ(g+g') = f\circ g + f\circ g'$ *für alle* $f, f' \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ *und* $g, g' \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ *gilt und*

(iv) *die Kategorie ein* ***Nullobjekt*** *enthält:* $\exists\ 0 \in Ob\mathscr{C}$: 1_0 *ist das Einselement der abelschen Gruppe* $Hom_{\mathscr{C}}(0, 0)$.

Definition 15 (abelsche Kategorie)**.** *Eine Kategorie* $\mathscr{C}$ *ist* ***abelsch****, falls*

(i) *sie additiv ist und*

(ii) *jeder Morphismus* $f : X \to Y$ *einen Kern* $k : ker(f) \to X$ *und einen Kokern* $c : Y \to coker(f)$ *hat und der induzierte Morphismus* $\bar{f} : coker(k) \to ker(c)$ *ein Isomorphismus ist.*
Für den ***Kern*** k *von* f *gilt:* $f \circ k = 0$ *und* $\forall\ Z \in Ob\mathscr{C}$ *und* $h : Z \to X$ *mit* $f \circ h = 0\ \exists!\ h' : Z \to ker(f)$ *mit* $h = k \circ h'$.
Für den ***Kokern*** c *von* f *gilt:* $c \circ f = 0$ *und* $\forall\ Z \in Ob\mathscr{C}$ *und* $g : Y \to Z$ *mit* $g \circ f = 0\ \exists!\ g' : coker(f) \to Z$ *mit* $g = g' \circ f$

Beispiel 3. *Die Kategorie der R-Linksmoduln wird mit* $R-Mod$ *bezeichnet, die der Rechtsmoduln mit* $Mod - R$*. Die endlich erzeugten R-Moduln bilden die volle Unterkategorie* $R - mod$ *beziehungsweise* $mod - R$*. Für ein* $M \in R - mod$ *bezeichnet man mit* $add(M)$ *die kleinste volle Unterkategorie von* $R-mod$*, die* M *enthält und abgeschlossen ist unter direkten Summanden und endlichen direkten Summen.*

Die wichtigste Kategorie in dieser Arbeit ist die derivierte Kategorie. Diese wird meistens über die Komplexkategorie und die Homotopiekategorie definiert. Zum Verständnis dieser Arbeit ist die exakte Definition der derivierten Kategorie nicht nötig. Ein Grundverständnis der derivierten Kategorie als Kategorie, in der die Objekte Komplexe sind und die Morphismen Kombinationen von normalen Komplexmorphismen und quasi-Isomorphismen, ist ausreichend. Daher werde ich den Schritt über die Homotopiekategorie überspringen, da die Homotopiekategorie hier nicht weiter benötigt wird. Die Definitionen übernehme ich von [7]. Dort ist für den interessierten Leser auch die Konstruktion über die Homotopiekategorie erklärt.

Definition 16 (Komplexkategorie)**.** *Sei* $\mathscr{A}$ *eine additive Kategorie, etwa* $\mathscr{A} = R - Mod$*. Ein* ***Komplex*** *über* $\mathscr{A}$ *ist ein Diagramm*

$\cdots \longrightarrow M^p \xrightarrow{d^p} M^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} \cdots$ *, $p \in \mathbb{Z}$ so dass $d^{p+1} \circ d^p = 0 \; \forall \; p \in \mathbb{Z}$, wobei M^p im* ***Grad*** *p des Komplexes steht. Ein* ***Morphismus*** *$f : M \to N$ von Komplexen M und N ist ein Morphismus der Diagramme, das heißt jedem $p \in \mathbb{Z}$ wird ein $f^p : M^p \to N^p$ zugeordnet, so dass $f^{p+1} \circ d_M^p = d_N^{p+1} \circ f^p$ gilt.*
Die ***Kategorie der Komplexe*** *wird meistens mit $C\mathscr{A}$ bezeichnet.*
Der ***shift Funktor*** *[-] schiebt die Objekte im Komplex gleichmäßig in eine Richtung, das heißt $M[n]^p = M^{p-n}$.*

Definition 17 (derivierte Kategorie)**.** *Sei $\mathscr{A}$ eine abelsche Kategorie. Die Homologie berechnet den Defekt eines Komplexes, genauer ist die* ***p-te Homologie von*** *$M := H^p(M) := ker(d^p)/im(d^{p-1})$. Ein* ***quasi-Isomorphismus*** *ist ein Morphismus von Komplexen, der Isomorphismen in den Homologiegruppen induziert. Die* ***derivierte Kategorie*** *erhält man nun aus der Komplexkategorie, indem man alle quasi-Isomorphismen formal invertiert. Die derivierte Kategorie ist also eine* ***Lokalisierung*** *der Komplexkategorie nach den quasi-Isomorphismen und wird mit $D\mathscr{A}$ bezeichnet.*

Diese Definition der derivierten Kategorie ist etwas ungenau, jedoch ausreichend präzise für die Belange dieser Arbeit. Die derivierte Kategorie ist ein wichtiges Beispiel für triangulierte Kategorien(5), die hier nicht weiter betrachtet werden.

2.3.2 Spezielle Morphismen

Definition 18. *Ein Morphismus in $Hom_{\mathscr{C}}(X,X)$ heißt* ***Endomorphismus****, man schreibt auch $End_{\mathscr{C}}(X)$ für $Hom_{\mathscr{C}}(X,X)$.*
Mit ***Monomorphismus*** *wird ein Morphismus $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ bezeichnet, für den gilt: $\forall \; Z \in Ob\mathscr{C}$ und $\forall \; g,h \in Hom_{\mathscr{C}}(Z,X)$: $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.*
Epimorphismus *nennt man einen Morphismus $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, der die Eigenschaft $\forall \; Z \in Ob\mathscr{C}$ und $\forall \; g,h \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z)$: $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ erfüllt.*

Bemerkung 4. *Im Fall $\mathscr{C} = R - Mod$ entspricht ein Monomorphismus einem injektiven, ein Epimorphismus einem surjektiven Ringhomomorphismus:*
Sei $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ surjektiv. $\forall x \in X : g(f(x)) = h(f(x)) \Rightarrow \forall y \in Y :$

(5) Siehe [4].

$g(y) = h(y) \Rightarrow g = h$.
Andererseits, falls f Epimorphismus ist, setze $Z = coker(f)$ und $g : y \mapsto [y] = y + im(f)$ die Quotientenabbildung; h sei die Nullabbildung. Dann ist $g \circ f = 0 = h \circ f$, also $g = h$ und damit $Z = 0$, also f surjektiv.
Für f injektiv, setze $Z = ker(f)$, g Inklusion und h Nullabbildung.

Definition 19 (split Mono, split Epi)**.** *Einen Monomorphismus $f : X \to Y$ nennt man **split Monomorphismus** oder kurz **split Mono**, falls es einen Morphismus $f' : Y \to X$ gibt, so dass $f' \circ f = id_X$ gilt. Ein **split Epimorphismus**, kurz **split Epi**, ist ein Epimorphismus $g : Y \to Z$ zu dem es einen Morphismus $g' : Z \to Y$ gibt, so dass $g \circ g' = id_Y$ gilt.*

Definition 20 (irreduzibel)**.** *Ein Morphismus $f : X \to Y$ wird **irreduzibel** genannt, falls er weder split Mono noch split Epi ist und jede Faktorisierung $f = g \circ h$ impliziert g split Epi oder h split Mono:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ & Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \Rightarrow h \text{ split Monomorphismus oder } g \text{ split Epimorphismus.}$$

Definition 21 (links-/ rechts-minimal)**.** *Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt **links-minimal**, falls alle Endomorphismen $h : Y \to Y$ mit $h \circ f = f$ Automorphismen sind:*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd} \Rightarrow h \text{ Automorphismus.}$$
***Rechts-minimal** ist analog definiert.*

Definition 22 (beinahe zerfallend)**.** *Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt **links beinahe zerfallend**, falls er kein split Mono ist und jeder Morphismus $h : X \to V$, der nicht split Mono ist, über f faktorisiert.*

*Ein Morphismus $g : Y \to Z$ heißt **rechts beinahe zerfallend**, falls er kein split Epi ist und jeder Morphismus $h : V \to Z$, der kein split Epi ist, über g faktorisiert.*

Definition 23 (links-/ rechts-$\mathscr{D}$-Approximation)**.** *Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie und $\mathscr{D}$ eine volle Unterkategorie.*
*Ein Morphismus $f : X \to D$ heißt **links $\mathscr{D}$-Approximation**, falls $D \in \mathscr{D}$ und für alle $D' \in \mathscr{D}$ ist die induzierte Abbildung*

$f^* : Hom_{\mathscr{C}}(D, D') \to Hom_{\mathscr{C}}(X, D')$, $h \mapsto fh$, surjektiv, das heißt das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\forall"'] & D \arrow[d, "\exists"] \\ & D' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

*Ein Morphismus $g : D \to Y$ heißt **rechts $\mathscr{D}$-Approximation**, falls $D \in \mathscr{D}$ und für alle $D' \in \mathscr{D}$ ist die induzierte Abbildung $g_* : Hom_{\mathscr{C}}(D', D) \to Hom_{\mathscr{C}}(D', Y)$, $h \mapsto hg$, surjektiv, das heißt das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] & Y \\ D' \arrow[u, "\exists"] \arrow[ur, "\forall"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

2.3.3 Spezielle Sequenzen

Sei $\mathscr{C}$ eine abelsche Kategorie.

Definition 24 (exakte Sequenz)**.** *Eine Sequenz*

$$\cdots \longrightarrow X_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

*heißt **exakt**, falls $ker(f_i) = im(f_{i-1})$ gilt.*

*Man sagt, dass eine **kurze exakte Sequenz** $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ **spaltet** oder **zerfällt**, falls f split Monomorphismus und g split Epimorphismus ist.*

Ein gutes Hilfsmittel in Kategorientheorie oder allgemeiner in Homologischer Algebra ist das

Fünfer Lemma. *Sei*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Falls β und δ Isomorphismen sind, α Epimorphismus und ε Monomorphismus ist, dann ist γ auch ein Isomorphismus.

Das Fünfer Lemma wird mit Diagrammjagd[6] bewiesen.

Definition 25 (Auslander Reiten Sequenzen)**.** *Eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$ heißt **beinahe zerfallende Sequenz** oder **Auslander-Reiten-Sequenz**, falls*

[6] Ein Beispiel für eine Diagrammjagd findet man im Beweis von Lemma 1.

- *X und Y unzerlegbar sind und*

- *f und g irreduzibel sind*

Bemerkung 5. *Äquivalent kann man eine Auslander-Reiten-Sequenz auch als kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$ mit f links beinahe zerfallend und g rechts beinahe zerfallend definieren. Ausreichend ist auch zu sagen dass f minimal links beinahe zerfallend oder g minimal rechts beinahe zerfallend ist. Daher stammt auch der Begriff „beinahe zerfallende Sequenz".*

Beispiel 4. *Sei $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$ minimale projektive Präsentation des A-Moduls M und $(-)^t = Hom_A(-, A)$.*
Dann ist die Sequenz $0 \to M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \to coker(p_1^t) \to 0$ exakt. Setze $TrM := coker(p_1^t) \in Ob(A^{op} - mod)$[7]. $D : A - mod \to mod - A^{op}$ sei die normale Dualität $Hom_k(-, k)$. $\tau := DTr$ und $\tau^{-1} := TrD$ sind fast zueinander inverse Äquivalenzen, Probleme machen Morphismen, die über projektive oder injektive Moduln faktorisieren. Man nennt τ und τ^{-1} ***Auslander-Reiten-Verschiebungen****. Für einen unzerlegbaren, nicht-injektiven Modul X mit $f : X \to M$ minimal links beinahe zerfallend, ist $0 \to X \xrightarrow{f} M \to \tau^{-1}X \to 0$ die zugehörige beinahe zerfallende Sequenz. Für einen unzerlegbaren, nicht-projektiven Modul Y mit $g : N \to Y$ minimal rechts beinahe zerfallend ist $0 \to \tau Y \to N \xrightarrow{g} Y \to 0$ die zugehörige beinahe zerfallende Sequenz.*

Auslander-Reiten-Sequenzen sind ein mächtiges Werkzeug in der Darstellungstheorie. Sie liefern bis auf Isomorphie für einen unzerlegbaren nicht-injektiven Modul X alle irreduziblen Morphismen, die in X starten und ebenso für einen unzerlegbar nicht-projektiven Modul Y alle irreduziblen Morphismen, die in Y enden.
Die Informationen, die man aus Auslander-Reiten-Sequenzen erhält, kann man leicht in einem speziellen Köcher ablesen, nämlich dem Auslander-Reiten Köcher.

Definition 26 (Auslander-Reiten Köcher)**.** *Als* ***Auslander-Reiten Köcher*** *einer Algebra bezeichnet man den Köcher, der als Punkte die Isomorphieklassen*

(7) A^{op} entspricht der Algebra A als Vektorraum und die Multiplikation ist gegeben durch $a * b := ba$.

unzerlegbarer Darstellungen und als Pfeile die irreduziblen Morphismen zwischen diesen Darstellungen hat.

Definition 27 (beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenzen)**.** *Eine Sequenz* $X \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\varphi} Y$ *wird* ***beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenz*** *genannt, falls*

- $D \in \mathscr{D}$
- *ψ links $\mathscr{D}$-Approximation von X und φ rechts $\mathscr{D}$-Approximation von Y ist*
- *ψ Kern von φ und φ Kokern von ψ ist.*

Ein wichtiges Hilfsmittel der Homologischen Algebra sind die Ext-Gruppen, die man auch als Gruppe der exakten Sequenzen auffassen kann (siehe Bemerkung 7).

Definition 28 (Ext)**.** *Mit $Ext^i_A(M,N)$ bezeichnet man den Defekt der Sequenz, die man erhält, wenn man $Hom_A(-,N)$ auf eine projektive Auflösung von M anwendet:*
$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ *projektive Auflösung von M, wende darauf $Hom_A(-,N)$ an:*
$0 \xrightarrow{f_0} Hom_A(P_0,N) \xrightarrow{f_1} Hom_A(P_1,N) \xrightarrow{f_2} ...Hom_A(P_n,N) \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$
dann ist $Ext^i_A(M,N) := ker(f_{i+1})/im(f_i)$.

Bemerkung 6.

- *$Ext^0_A(M,N)$ ist demnach $ker(f_1)/im(f_0) = ker(f_1)$, und da $0 \longrightarrow Hom_A(M,N) \longrightarrow Hom_A(P_0,N) \xrightarrow{f_1} Hom_A(P_1,N)$ exakt ist, gilt $ker(f_1) = Hom_A(M,N)$. Es gilt also $Ext^0 = Hom$.*
- *Wendet man den Hom-Funktor $Hom(M,-)$ auf eine kurze exakte Sequenz $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ an, so bekommt man die lange exakte Sequenz $0 \to Hom(M,X) \to Hom(M,Y) \to Hom(M,Z) \to Ext^1(M,X) \to Ext^1(M,Y) \to Ext^1(M,Z) \to Ext^2(M,X) \to ....$*
  Der Funktor $Hom(-,N)$ ist kontravariant und liefert die lange exakte Sequenz $0 \to Hom(Z,N) \to Hom(Y,N) \to Hom(X,N) \to Ext^1(Z,N) \to Ext^1(Y,N) \to Ext^1(X,N) \to Ext^2(Z,N) \to ...$ (siehe [1], S.428, Theorem 4.5).

Bemerkung 7. *Man kann $Ext^1_A(X,Y)$ auch als Gruppe der kurzen exakten Sequenzen mit Startterm Y und Endterm X modulo einer Äquivalenzrelation definieren, mit der sogenannten Baer-Summe als Addition. Die Null entspricht in dem Fall der Klasse der zerfallenden Sequenzen. Die Kenntnis dieser Definition kann sehr praktisch sein, doch das wirkliche Rechnen damit ist umständlich. Den interessierten Leser verweise ich hier auf [2] Seite 18f.*

2.4 Kipptheorie

Definition 29 ((verallgemeinerter) Kippmodul)**.** *Sei A eine Algebra. Ein A-Modul T heißt* ***(verallgemeinerter) Kippmodul****, falls*

- $Ext^i_A(T,T) = 0 \ \forall \ i > 0$
- $pd_A(T) \leq n$ *für ein* $n \geq 1$
- $\exists$ *exakte Sequenz* $0 \longrightarrow A \longrightarrow T^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^m \longrightarrow 0$ *mit* $T^i \in add(T) \ \forall \ 0 \leq i \leq m$ *und* $m \geq 1$

Falls $n = m = 1$ heißt T ***(klassischer) Kippmodul****. Gilt die dritte Eigenschaft nicht, so wird T* ***partieller Kippmodul*** *genannt. In dieser Arbeit sind die Kippmoduln verallgemeinert, sofern nicht anders vermerkt.*

Bemerkung 8. *Der Begriff „Kippmodul“ kommt daher, dass der Λ-Kippmodul T im Fall $\Gamma \simeq End_\Lambda(T)$ auch Γ-Kippmodul ist und sich die von T induzierten Torsionspaare laut Theorem von Brenner und Butler entgegengesetzt entsprechen: Die Torsionsklasse $\mathcal{T}(T)$ wird durch $Hom_\Lambda(T,-)$ zur torsionsfreien Klasse $\mathcal{Y}(T)$ in Γ-mod, $- \otimes_\Gamma T$ führt $\mathcal{Y}(T)$ zu $\mathcal{T}(T)$ zurück. Die torsionsfreie Klasse $\mathcal{F}(T)$ wird durch $Ext^1_\Lambda(T,-)$ zur Torsionsklasse $\mathcal{X}(T)$ in Γ-mod, $Tor^\Gamma_1(-,T)$ macht dies rückgängig. Dies ist in [1], Kapitel VI ausführlich erklärt.*

Definition 30 (deriviert äquivalent)**.** *Zwei Ringe R_1 und R_2 nennt man* ***deriviert äquivalent****, falls es einen (verallgemeinerten) Kippmodul $T \in R_1$-mod gibt, so dass $R_2 \simeq End_{R_1}(T)$ gilt.*

Der Name kommt daher, dass in dem Fall die derivierten Kategorien von R_1-Mod und R_2-Mod äquivalent sind als Kategorien(8). Dies geht zurück auf [9]:

(8) Sind R_1 und R_2 links-kohärente Ringe, etwa Artin-Algebren, so sind auch die derivierten Kategorien von R_1-mod und R_2-mod äquivalent als triangulierte Kategorien.

Rickards Theorem. *Seien Λ und Γ Ringe. Dann sind äquivalent:*

(a) $K^-(Proj - \Lambda)$ *und* $K^-(Proj - \Gamma)$ *sind äquivalent als triangulierte Kategorien;*

(b) $D^b(Mod - \Lambda)$ *und* $D^b(Mod - \Gamma)$ *sind äquivalent als triangulierte Kategorien;*

(c) $K^b(Proj - \Lambda)$ *und* $K^b(Proj - \Gamma)$ *sind äquivalent als triangulierte Kategorien;*

(d) $K^b(P_\Lambda)$ *und* $K^b(P_\Gamma)$ *sind äquivalent als triangulierte Kategorien;*

(e) Γ *ist isomorph zu* $End_\Lambda(T)$, *wobei* T *ein Objekt in* $K^b(P_\Lambda)$ *ist mit*

  (i) $Hom_\Lambda(T, T[i]) = 0$ *für* $i \neq 0$,

  (ii) *add*(T) *erzeugt* $K^b(P_\Lambda)$ *als triangulierte Kategorie.*

Dieses T ist ein sogenannter **Kippkomplex**. K steht hier für die Homotopiekategorie der abelschen Kategorie $\mathscr{A}$, $K^-(\mathscr{A})$ ist die volle Unterkategorie von $K(\mathscr{A})$, deren Komplexe nach unten beschränkt sind, das heißt ein Objekt in $K^-(\mathscr{A})$ ist isomorph zu einem Komplex mit 0-Einträgen für sehr kleinen Grad. $K^b(\mathscr{A})$ ist die volle Unterkategorie von $K(\mathscr{A})$, die in beide Richtungen beschränkt ist. $D^b(\mathscr{A})$ ist entsprechend die beschränkte derivierte Kategorie. $Proj - \mathscr{A}$ ist die volle Unterkategorie von $Mod - \mathscr{A}$, deren Objekte alle projektiv sind. $P_\mathscr{A}$ sind die endlich erzeugten Projektiven.

3 Beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenzen und derivierte Äquivalenzen

3.1 Ergebnisse von Wei Hu und Changchang Xi

Grundlage für diese Diplomarbeit ist der Artikel [5]. Hier haben Wei Hu und Changchang Xi aus einer Verallgemeinerung von Auslander-Reiten-Sequenzen derivierte Äquivalenzen der Endomorphismenringe der Endterme plus verallgemeinertem Mittelterm hergestellt. Insbesondere für Artin-Algebren und selbstinjektive Algebren hat dies interessante Folgerungen. Auch die Form des

Kippmoduls, der die derivierte Äquivalenz erbringt, kann in einigen Fällen genauer bestimmt werden.
In diesem Kapitel werde ich die wichtigsten Aussagen aus [5] darlegen.

Theorem 1. *Sei $\mathscr{C}$ additive Kategorie und M ein Objekt in $\mathscr{C}$.*
Falls es eine Sequenz $X \xrightarrow{\psi} M_n \longrightarrow ... \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} Y$ gibt mit $M_i \in add(M)$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$, ψ links $add(M)$-Approximation von X und φ rechts $add(M)$-Approximation von Y, so dass für $V = M \oplus X$ und $W = M \oplus Y$ die induzierten Sequenzen

(1) $0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(V, X) \xrightarrow{\psi_*} Hom_{\mathscr{C}}(V, M_n) \longrightarrow \cdots$

$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(V, M_1) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_{\mathscr{C}}(V, Y)$

(2) $0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(Y, W) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_{\mathscr{C}}(M_1, W) \longrightarrow \cdots$

$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(M_n, W) \xrightarrow{\psi^*} Hom_{\mathscr{C}}(X, W)$

exakt sind, so sind $End_{\mathscr{C}}(V)$ und $End_{\mathscr{C}}(W)$ deriviert äquivalent. Diese Äquivalenz ist gegeben durch einen Kippmodul von projektiver Dimension $\leq n$.

Theorem 1 ist in [5] ein Lemma, da die gewünschte Verbindung zwischen Auslander-Reiten-Sequenzen und derivierter Äquivalenz erst im Spezialfall $n = 1$ mit zusätzlicher Forderung der Exaktheit der ersten Sequenz auftritt.

Theorem 2. *Sei $\mathscr{C}$ additive Kategorie und M ein Objekt in $\mathscr{C}$.*
Falls $X \xrightarrow{\psi} M' \xrightarrow{\varphi} Y$ eine beinahe $add(M)$-zerfallende Sequenz in $\mathscr{C}$ ist, so sind die Endomorphismenringe $End_{\mathscr{C}}(X \oplus M)$ und $End_{\mathscr{C}}(M \oplus Y)$ deriviert äquivalent.

Die wichtigste Anwendung für Theorem 2 sind die Auslander-Reiten-Sequenzen der Artin-Algebren. Artin-Algebren sind Algebren über einem kommutativen Artin-Ring R, also einem Ring, in dem jede absteigende Kette von Idealen stationär wird und die als R-Modul endlich erzeugt sind. Eine Auslander-Reiten-Sequenz $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} M' \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow 0$ ist eine beinahe $add(M)$-zerfallende Sequenz für jedes M mit $M' \in add(M)$ und $X, Y \notin add(M)$.

Für eine selbstinjektive Algebra A, also eine Algebra, die als Modul über sich selbst injektiv ist, erhält man aus Theorem 2 die Aussage, dass $End_A(A \oplus X)$ und $End_A(A \oplus \tau X)$ deriviert äquivalent sind, wobei τ die Auslander-Reiten-Verschiebung DTr und X ein beliebiger A-Modul ist. Damit sind alle $End_A(A \oplus \tau^n X)$ zueinander deriviert äquivalent.

Eine Anwendung von Theorem 1 sind beispielsweise die n-beinahe zerfallenden Sequenzen in einer maximalen $(n-1)$-orthogonalen Unterkategorie der Kategorie A-mod einer endlich dimensionalen Algebra A. Diese werden in [6] näher betrachtet.

Auch über die Form des Kippmoduls wissen wir mehr: Im Falle der Auslander-Reiten-Sequenz ist der Kippmodul ein BB-Kippmodul(9), also ein Modul der Form $T = \tau^{-1}S \oplus P$, wobei S ein nicht-injektiver einfacher A-Modul mit $pd_A(\tau^{-1}S) \leq 1$ und $Ext_A^1(S,S) = 0$ und P Komplement der projektiven Decke $P(S)$ von S, also $A = P(S) \oplus P$ ist. τ^{-1} steht hier für das Inverse der Auslander-Reiten-Verschiebung, $\tau^{-1} = TrD$. Ist S sogar projektiv, dann ist T ein APR-Kippmodul(10).

n-BB-Kippmoduln einer Artin-Algebra A sind Moduln der Form $T = \tau^{-1}\Omega^{-n+1}(S) \oplus P$, wobei n eine positive ganze Zahl und S einfacher A-Modul, mit $Ext_A^j(DA, S) = 0 \ \forall 0 \leq j \leq n-1$ und $Ext_A^i(S,S) = 0$ $\forall 1 \leq i \leq n$, ist. Ω^n bezeichne den n-ten (Ko-)Syzygy-Operator: $\Omega(X)$ ist der Kern der projektiven Decke von X und Ω^{-1} der Kokern der injektiven Hülle von X.
Diese Kippmoduln treten auf, falls für alle $i \in \{1, ..., n\}$ die Sequenzen $0 \to X_i \to M_i \to X_{i-1} \to 0$ beinahe zerfallend sind und für $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ $X_n \notin add(M)$ gilt und die X_i paarweise nicht-isomorph sind. Der Kippmodul ist dann $T = Hom_A(X_n \oplus M, X_0) \oplus Hom_A(X_n \oplus M, M)$.
Außerdem treten n-BB-Kippmoduln in maximalen $(n-1)$-orthogonalen Unterkategorien von A-mod (A endlich dimensionale Algebra) auf, falls für X, Y unzerlegbar die Sequenz $0 \to X \xrightarrow{\psi} M_n \to \cdots \to M_1 \xrightarrow{\varphi} Y \to 0$ n-beinahe zerfallend ist und X nicht in $add(M)$ ist für $M = \bigoplus_{j=1}^{n} M_j$.

(9) Nach S. Brenner und M. C. R. Butler, definiert in [5].
(10) Nach M. Auslander, M. I. Platzeck und I. Reiten.

In diesem Fall ist $Hom_A(M \oplus X, M) \oplus im(Hom_A(M \oplus X, \varphi))$ n-BB-Kippmodul in $End_A(M \oplus X)$-mod.

Es ergibt sich auch eine Folgerung für triangulierte Kategorien, die Auslander-Reiten-Triangeln enthalten. Da ich dies hier nicht definiert habe und auch weiter keinen Nutzen daraus ziehen werde, belasse ich es bei dieser unpräzisen Bemerkung.

3.2 Beispiel: Alle beinahe $\mathscr{D}$-zerfallenden Sequenzen im A_3

Im Folgenden möchte ich die Frage untersuchen, inwiefern Theorem 2 neue Erkenntnisse bringt. Welche derivierten Äquivalenzen bekommt man aus den beinahe $\mathscr{D}$-zerfallenden Sequenzen? Bekommt man alle? Dies werde ich nun in einem einfachen und dennoch aufwendigen Beispiel untersuchen.

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper und Q der Köcher $\bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$.
Der dazugehörige Auslander-Reiten Köcher ist:(11)

$$
\begin{tikzcd}
 & & 111 \arrow[dr] & & \\
 & 110 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 011 \arrow[dr] & \\
100 \arrow[ur] & & 010 \arrow[ur] & & 001
\end{tikzcd}
$$

Bemerkung 9. *Ich werde mich in diesem Beispiel auf* ***basische Algebren*** *beschränken. Dies sind Algebren mit einer vollständigen Menge paarweise orthogonaler Idempotente* $\{e_1, ..., e_n\}$(12) *so dass* $Ae_i \not\simeq Ae_j$ *für* $i \neq j$. *Sich auf basische Algebren zu beschränken ist jedoch keine echte Einschränkung, da die Kategorien* $A - mod$ *und* $A^b - mod$ *äquivalent sind, wobei* $A^b = eAe$ *eine basische Algebra* ***assoziiert*** *zu A sei, das heißt* $e = e_{i_1} + ... + e_{i_k}$, $e_{i_j} \neq e_{i_l}$ *für* $j \neq l$ *und jeder Modul* Ae_s *ist isomorph zu einem der* Ae_{i_t}, $t \in \{1, ..., k\}$. *Beweis: [1], Seite 33, für Rechtsmoduln.*

(11) Die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Moduln werden hier durch ihre Dimensionsvektoren dargestellt. 110 bedeutet zum Beispiel, dass für den ersten und zweiten Punkt jeweils ein eindimensionaler Vektorraum eingesetzt wird, für den dritten der Nullvektorraum, etwa entspricht 110 der Äquivalenzklasse von $k \xleftarrow[1]{} k \xleftarrow[0]{} 0$.

(12) Die Menge der Idempotente ist vollständig, falls $A \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ gilt.

Der Einfachheit halber sind im Folgenden Relationen als gepunktete Linien dargestellt: Eine gepunktete Linie über einem Weg bedeutet, dass diesem Weg eine Nullrelation entspricht. Eine gepunktete Linie zwischen zwei Wegen besagt, dass die Differenz dieser Wege eine Nullrelation definiert.

Die erste Auslander-Reiten-Sequenz $0 \longrightarrow 100 \longrightarrow 110 \longrightarrow 010 \longrightarrow 0$, als beinahe $add(110 \oplus N)$-zerfallende Sequenz betrachtet, ergibt dann die folgenden Äquivalenzen:

1. Für $N = 0$:
   $End(100 \oplus 110) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(110 \oplus 010) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$

2. Für $N = 111$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(110 \oplus 111 \oplus 010) \simeq k \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

3. Für $N = 011$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 011) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dotted, no head] \end{tikzcd}$ und $End(110 \oplus 010 \oplus 011) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

4. Für $N = 001$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 001) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \qquad \bullet$ und $End(110 \oplus 010 \oplus 001) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \qquad \bullet$

5. Für $N = 111 \oplus 011$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 111 \oplus 011) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[lll, bend right, dotted, no head] \end{tikzcd}$ und

$$End(110 \oplus 010 \oplus 111 \oplus 011) \simeq k \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] & \\ \bullet & & \bullet \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[ll, dotted, no head] \\ & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

6. Für $N = 111 \oplus 001$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 111 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dotted, no head] \end{tikzcd}$ und
   $End(110 \oplus 010 \oplus 111 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dotted, no head] \end{tikzcd}$

7. Für $N = 011 \oplus 001$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 011 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dotted, no head] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, bend left, dotted, no head] \end{tikzcd}$ und
   $End(110 \oplus 010 \oplus 011 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, bend left, dotted, no head] \end{tikzcd}$

8. Für $N = 111 \oplus 011 \oplus 001$:
   $End(100 \oplus 110 \oplus 111 \oplus 011 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[rrr, dash, dotted, bend left] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, dash, dotted, bend left] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$
   und

   $End(110 \oplus 010 \oplus 111 \oplus 011 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] & & \\ \bullet \arrow[rr, dash, dotted] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[dl] & \bullet \arrow[l] \arrow[dll, dash, dotted, bend left] \\ & \bullet \arrow[ul] & & \end{tikzcd}$

Die Auslander-Reiten-Sequenz $0 \longrightarrow 110 \longrightarrow 111 \oplus 010 \longrightarrow 011 \longrightarrow 0$, als beinahe $add(111 \oplus 010 \oplus N)$-zerfallende Sequenz betrachtet, ergibt die Äquivalenzen

9. Für $N = 0$:
   $End(110 \oplus 111 \oplus 010) \simeq k\, \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(111 \oplus 010 \oplus 011) \simeq k\, \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$

10. Für $N = 100$:

    $End(110 \oplus 111 \oplus 010 \oplus 100) \simeq k$ $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \arrow[dl, dash, dotted, bend right] & \\ \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$ und

    $End(111 \oplus 010 \oplus 011 \oplus 100) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, dash, dotted, bend right] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$

11. Für $N = 001$:
    $End(110 \oplus 111 \oplus 010 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, dash, dotted, bend right] \end{tikzcd}$ und
    $End(111 \oplus 010 \oplus 011 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[dl, dash, dotted, bend right] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$

12. Für $N = 100 \oplus 001$:

    $End(110 \oplus 111 \oplus 010 \oplus 100 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \arrow[dl, dash, dotted, bend right] & & \\ \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, dash, dotted, bend right] \end{tikzcd}$ und

    $End(111 \oplus 010 \oplus 011 \oplus 100 \oplus 001) \simeq k$ $\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[ll, dash, dotted, bend right] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[dl, dash, dotted, bend right] \\ & & \bullet & \end{tikzcd}$

Letztlich ergibt dritte die Auslander-Reiten-Sequenz $0 \longrightarrow 010 \longrightarrow 011 \longrightarrow 001 \longrightarrow 0$, als beinahe $add(011 \oplus N)$-zerfallende Sequenz betrachtet, die Äquivalenzen:

13. Für $N = 0$:
$End(010 \oplus 011) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(011 \oplus 001) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$

14. Für $N = 100$:
$End(010 \oplus 011 \oplus 100) \simeq k \bullet \qquad \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(011 \oplus 001 \oplus 100) \simeq k \bullet \qquad \bullet \longleftarrow \bullet$

15. Für $N = 110$:
$End(010 \oplus 011 \oplus 110) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(011 \oplus 001 \oplus 110) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

16. Für $N = 111$:
$End(010 \oplus 011 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ und $End(011 \oplus 001 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

17. Für $N = 100 \oplus 110$:
$End(010 \oplus 011 \oplus 100 \oplus 110) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und
$End(011 \oplus 001 \oplus 100 \oplus 110) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

18. Für $N = 100 \oplus 111$:
$End(010 \oplus 011 \oplus 100 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ und
$End(011 \oplus 001 \oplus 100 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

19. Für $N = 110 \oplus 111$:

$$End(010 \oplus 011 \oplus 110 \oplus 111) \simeq k \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] & \\ \bullet \arrow[rr, dotted, no head] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd} \text{ und}$$

$$End(011 \oplus 001 \oplus 011 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

20. Für $N = 100 \oplus 110 \oplus 111$:

$$End(010 \oplus 011 \oplus 100 \oplus 110 \oplus 111) \simeq k \begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[dl] & \\ \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[rr, dotted, no head] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & & \bullet \arrow[ul] & \end{tikzcd} \text{ und}$$

$$End(011 \oplus 001 \oplus 100 \oplus 110 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

Man erhält also derivierte Äquivalenzen für Wegealgebren von Teilköchern des Auslander-Reiten-Köchers von kQ. Diese erhält man indem man einen

Modul N mit paarweise nicht-isomorphen direkten Summanden, der die Bedingung $X, \tau X \notin add(N)$ erfüllt, zum Mittelterm M der Auslander-Reiten-Sequenz von X addiert und diese als beinahe $add(M \oplus N)$-zerfallende Sequenz betrachtet.
Es stellt sich die Frage, ob es noch andere relevante beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenzen gibt.

Da $X \to M$ injektiv sein muss, gibt es nur zwei weitere Möglichkeiten für beinahe $add(M \oplus N)$-zerfallende Sequenzen mit möglichst kleinem M:

(I) $0 \longrightarrow 100 \longrightarrow 111 \longrightarrow 011 \longrightarrow 0$

(II) $0 \longrightarrow 110 \longrightarrow 111 \longrightarrow 001 \longrightarrow 0$

In diesen Fällen ist es nicht so einfach zu entscheiden, ob ein Modul $N \notin add(X \oplus Y)$ zu dem Mittelterm M hinzugenommen werden kann, um eine beinahe $add(M \oplus N)$-zerfallende Sequenz zu erhalten, da nicht alle irreduziblen Morphismen, die in 100 beziehungsweise 110 starten und nicht alle irreduziblen Morphismen, die in 011 beziehungsweise 001 enden, in der Sequenz enthalten sind. Es muss also mindestens ein unzerlegbarer Modul $N \notin add(X \oplus Y \oplus M)$ existieren, der nicht hinzugenommen werden kann, da es einen irreduziblen Morphismus $X \to N$ oder $N \to Y$ gibt, der nicht über die vorhandenen Morphismen $X \to M$ oder $M \to Y$ faktorisiert.

Im Fall (I) kann 110 nicht hinzugenommen werden, da der Morphismus $100 \to 110$ nicht über $100 \to 111$ faktorisiert. 010 kann nicht hinzugefügt werden, da $010 \to 011$ nicht über $111 \to 011$ faktorisiert. Nur 001 kann hinzugefügt werden, da es keinen nicht-trivialen Morphismus $100 \to 001$ oder $001 \to 011$ gibt. Man erhält also aus Theorem 2 die derivierten Äquivalenzen

(i) Für $N = 0$:
$End(100 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(111 \oplus 011) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$
und

(ii) für $N = 001$:
$End(100 \oplus 111 \oplus 001) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(001 \oplus 111 \oplus 011) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

Beide Äquivalenzen waren schon vorher bekannt.

Im Fall (II) kann 100 hinzugefügt werden, da es keine nicht-trivialen Morphismen $110 \to 100$ oder $100 \to 001$ gibt. 010 und 011 können nicht hinzugefügt werden, da $110 \to 010$ nicht über $110 \to 111$ und $011 \to 001$ nicht über $111 \to 001$ faktorisiert. Damit bekommt man mit Theorem 2 nur die schon bekannten derivierten Äquivalenzen

(iii) Für $N = 0$:
$End(110 \oplus 111) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(111 \oplus 001) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet$
und

(iv) für $N = 100$:
$End(110 \oplus 111 \oplus 100) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und $End(111 \oplus 001 \oplus 100) \simeq k \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

Dies sind alle beinahe $\mathscr{D}$-zerfallenden Sequenzen mit unzerlegbarem Startterm X und $\mathscr{D} = add(L)$ für ein $L \in kQ$-mod.
Falls X zerlegbar ist, so kann jede beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenz, die in X startet, durch „Addieren" von „kleineren" beinahe $\mathscr{D}$-zerfallenden Sequenzen, die in direkten Summanden von X starten, erzeugt werden:

Lemma 1. *Sei $X = X_1 \oplus X_2$ eine nicht-triviale Zerlegung von X und $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow 0$ eine beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenz in kQ-mod. Dann ist die Sequenz eine direkte Summe „kleinerer" beinahe $\mathscr{D}$-zerfallender Sequenzen, die in X_1 beziehungsweise X_2 starten und eventuell einer im Nullmodul startenden Sequenz.*

Beweis. Betrachte zuerst den Fall ψ links-minimal. $X = X_1 \oplus X_2$, also ist $(\,0 \to X \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\varphi} Y \to 0\,) \simeq (\,0 \to X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{(\psi', \tilde{\psi})} D \xrightarrow{\varphi} Y \to 0\,)$, und ψ' und $\tilde{\psi}$ sind wiederum links $\mathscr{D}$-Approximationen von X_1 beziehungsweise X_2. Ersetze diese durch links-minimale Approximationen $\psi_1 : X_1 \to D_1$ und $\psi_2 : X_2 \to D_2$ (siehe [3], S.67, Proposition 1.4(a)) und betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}} D_1 \oplus D_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow 0$$

dabei ist $\begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}$ links-minimale $\mathscr{D}$-Approximation von $X = X_1 \oplus X_2$, also ist $D \simeq D_1 \oplus D_2$ (siehe [3], S.67, Proposition 1.4(b)). Mit dem Fünfer Lemma erhält man dann $Y \simeq Y_1 \oplus Y_2$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\wr"] & D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\wr"] & Y \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\wr"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[d, "\wr"] \\
X_1 \oplus X_2 \arrow[r] & D_1 \oplus D_2 \arrow[r] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei die gestrichelte Linie wohldefiniert ist: man nehme ein $y \in Y$ und ein Urbild $D \ni d \mapsto (d_1, d_2) \in D_1 \oplus D_2 \mapsto (y_1, y_2) \in Y_1 \oplus Y_2$. Sei $d' \in D$ ein weiteres Urbild von y, dann gilt $d - d' \mapsto y - y = 0$. Daher existiert ein $x \in X$ so dass $x \mapsto d - d'$. Andererseits gilt jedoch auch: $x \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (d_1'', d_2'')$, wobei (d_1'', d_2'') das Bild von $d - d'$ ist, das heißt $(d_1'', d_2'') = (d_1, d_2) - (d_1', d_2')$, falls (d_1', d_2') das Bild von d' ist. $(d_1'', d_2'') \mapsto 0$ impliziert nun $(d_1', d_2') \mapsto (y_1, y_2)$, somit hängt das Bild von y unter der vertikalen Abbildung nicht von der Wahl des Urbilds unter φ ab.

Es gilt also
$(0 \to X \to D \to Y \to 0) \simeq (0 \to X_1 \oplus X_2 \to D_1 \oplus D_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to 0)$ und
$(0 \to X_1 \oplus X_2 \to D_1 \oplus D_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to 0) =$
$(0 \to X_1 \to D_1 \to Y_1 \to 0) \oplus (0 \to X_2 \to D_2 \to Y_2 \to 0)$.
Außerdem sind $0 \to X_1 \to D_1 \to Y_1 \to 0$ und $0 \to X_2 \to D_2 \to Y_2 \to 0$ beinahe $\mathscr{D}$-zerfallend:
Nach Definition ist ψ_i links $\mathscr{D}$-Approximation von X_i. Auch φ_i ist rechts $\mathscr{D}$-Approximation von Y_i $(i = 1, 2)$: Sei $\hat{D} \in \mathscr{D}$ beliebig und $\rho : \hat{D} \to Y_1$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$. Dann kann ρ zu $\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} : \hat{D} \to Y$ erweitert werden. Da φ eine rechts $\mathscr{D}$-Approximation von Y ist, existiert ein Morphismus $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \zeta \end{pmatrix}$, der das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}"] & Y \\
\hat{D} \arrow[u, "\begin{pmatrix} \vartheta \\ \zeta \end{pmatrix}"] \arrow[ur, swap, "\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}"] &
\end{tikzcd}$$
kommutieren lässt. Also ist $\rho = \vartheta\varphi_1$, und damit ist φ_1 rechts $\mathscr{D}$-Approximation von Y_1.
Für φ_2 betrachte $\rho' : \hat{D} \to Y_2$, der zu $\begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} : \hat{D} \to Y$ erweitert werden kann.

Dann ist $\rho = \zeta\varphi_2$, also φ_2 rechts $\mathscr{D}$-Approximation von Y_2. Damit ist

$$(0 \to X \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\varphi} Y \to 0) \simeq \begin{array}{c} (0 \to X_1 \xrightarrow{\psi_1} D_1 \xrightarrow{\varphi_1} Y_1 \to 0) \\ \oplus \\ (0 \to X_2 \xrightarrow{\psi_2} D_2 \xrightarrow{\varphi_2} Y_2 \to 0) \end{array}$$

und alle Sequenzen sind beinahe $\mathscr{D}$-zerfallend.

Falls ψ nicht links-minimal ist, so gilt nach [3], S.67, Proposition 1.4(d) für $\psi' =$ Projektion auf $D' \circ \psi$ und $\psi'' =$ Projektion auf $D'' \circ \psi$:

$(0 \to X \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\varphi} Y \to 0) \simeq (0 \to X \xrightarrow{\begin{pmatrix}\psi' \\ \psi''\end{pmatrix}} D' \oplus D'' \xrightarrow{\varphi} Y \to 0)$ mit ψ' links-minimal und $\psi'' = 0$.

Dann ist $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\psi'} D' \longrightarrow Y' \longrightarrow 0$ beinahe $\mathscr{D}$-zerfallende Sequenz mit $Y' \oplus D'' = Y$:

$$(0 \to X \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\varphi} Y \to 0) \simeq (0 \to X \xrightarrow{\begin{pmatrix}\psi' \\ 0\end{pmatrix}} D' \oplus D'' \xrightarrow{\varphi} Y \to 0),$$

$Y = coker \begin{pmatrix}\psi' \\ 0\end{pmatrix} = (D' \oplus D'')/im \begin{pmatrix}\psi' \\ 0\end{pmatrix} \simeq D'/im(\psi') \oplus D'' = Y' \oplus D''.$

Damit ist $(0 \to X \to D \to Y \to 0) \simeq (0 \to X \to D' \oplus D'' \to Y' \oplus D'' \to 0)$ und $0 \to X \xrightarrow{\psi'} D' \to Y' \to 0$ ist beinahe $\mathscr{D}$-zerfallend mit ψ' links-minimal.

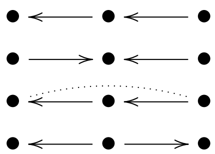
$\overset{oben}{\Rightarrow} (0 \to X \to D' \to Y' \to 0) \simeq (0 \to X_1 \to D_1 \to Y_1 \to 0) \oplus (0 \to X_2 \to D_2 \to Y_2 \to 0)$

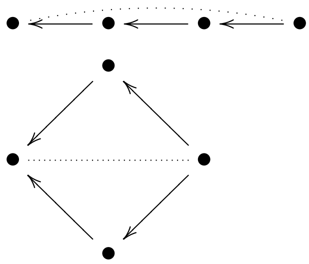
$\Rightarrow (0 \to X \to D \to Y \to 0) \simeq (0 \to X_1 \to D_1 \to Y_1 \to 0) \oplus (0 \to X_2 \to D_2 \to Y_2 \to 0) \oplus (0 \to 0 \to D'' \to D'' \to 0).$ $\square$

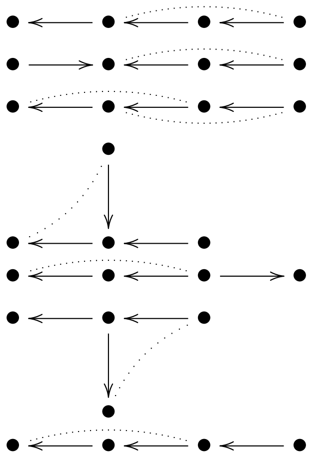
Die bisher berechneten Sequenzen reichen also aus, um alle beinahe $\mathscr{D}$-zerfallenden Sequenzen zu bestimmen.

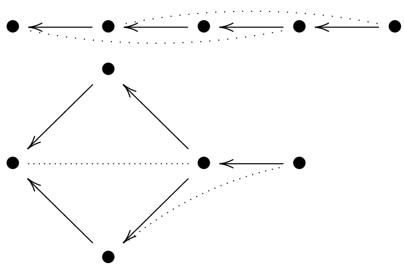
Kombiniert man die so erhaltenen derivierten Äquivalenzen, bekommt man folgende Äquivalenzklassen, wobei die Wegealgebren zu den Köchern in einem

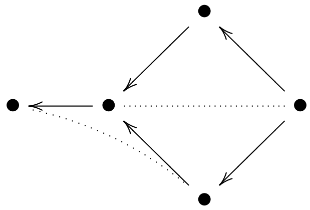
Block jeweils zueinander deriviert äquivalent sind:

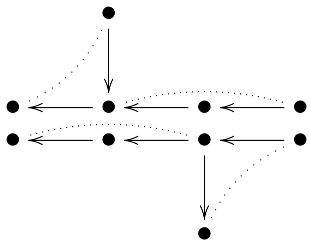





)







Es ist allerdings aus der Kipptheorie bekannt, dass $k\ \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ und $k\ \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ beide deriviert äquivalent zu $k\ \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ sind (erstere über den Kippmodul $T = 1100 \oplus 1111 \oplus 0111 \oplus 0001$, letztere über $T = 1000 \oplus 1100 \oplus 1111 \oplus 0001$). Daher müssen sie auch deriviert äquivalent zueinander sein. Die zweite und dritte Äquivalenzklasse bilden also eigentlich eine gemeinsame große Klasse.
Das bedeutet leider, dass nicht alle existenten derivierten Äquivalenzen von Teilköchern des Auslander-Reiten Köchers auf diese Weise gefunden werden können.

4 Übergang zu Ringen

Im Folgenden werde ich Theorem 1 in die Sprache der Ringtheorie übersetzen. Ab jetzt seien R ein Ring mit Eins und $e, g, f \in R$ paarweise orthogonale Idempotente mit $1 = e + g + f$. Setze $\bar{e} := e + g$ und $\bar{f} := g + f$. Sei ferner $g = t_1 + ... + t_k$ Zerlegung in paarweise orthogonale primitive Idempotente und sei $\sum_g' = \{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j t_j | \lambda_j \in \mathbb{N}_0\}$.

Notation. Für h_1, h_2, h, l_1, l_2, l Idempotente in R, schreibe $hRl_1 \oplus hRl_2 =: hR(l_1 + l_2)$ und $h_1Rl \oplus h_2Rl =: (h_1 + h_2)Rl$.
Beispielsweise ist dann $hR\tilde{g} = hR(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j t_j) = \bigoplus_{j=1}^{k} (hRt_j)^{\lambda_j}$ für beliebiges

$\tilde{g} \in \sum_g'$.

Bei der „Übersetzung“ des Theorems werden aus Homomorphismenräumen $Hom_\Lambda(\Lambda i, \Lambda\omega)$ Bimoduln der Form $i\Lambda\omega$. Diese stehen in Bijektion zueinander:

Lemma 2. *Sei Λ ein Ring, $i \in \Lambda$ Idempotent und $\omega \in \Lambda$. Dann ist $\Phi : i\Lambda\omega \to Hom_\Lambda(\Lambda i, \Lambda\omega), \Phi(i\lambda\omega)(\lambda' i) = \lambda' i\lambda\omega$ ein Isomorphismus von $i\Lambda i$-Linksmoduln (beziehungsweise $\omega\Lambda\omega$-Rechtsmoduln, falls $\omega^2 = \omega$).*

Beweis. injektiv: $\Phi(i\lambda\omega)(\lambda' i) = \lambda' i\lambda\omega = 0 \ \forall \lambda' i \in \Lambda i \overset{i\in\Lambda i}{\Rightarrow} i\lambda\omega = 0 \Rightarrow ker(\Phi) = 0$
surjektiv: Sei $\varphi \in Hom_\Lambda(\Lambda i, \Lambda\omega)$ beliebig. Dann ist $\varphi(\lambda' i) = \lambda'\varphi(i)$, also ist φ gegeben durch das Bild von i. Sei $\varphi(i) = \lambda\omega$, dann ist $\lambda\omega = \varphi(i) = \varphi(i^2) = i\varphi(i) = i\lambda\omega$, also $\varphi(i) = i\lambda\omega \Rightarrow \varphi(\lambda' i) = \lambda' i\lambda\omega \Rightarrow \varphi = \Phi(i\lambda\omega)$.

Die Modulstruktur von $Hom_\Lambda(\Lambda i, \Lambda\omega)$ ist gegeben durch $(i\lambda' i * \varphi)(\lambda'' i) := \varphi(\lambda'' i\lambda' i)$ beziehungsweise $(\varphi * \omega\lambda'\omega)(\lambda'' i) := \varphi(\lambda'' i)\omega\lambda'\omega$.
Sei $\varphi = \phi(i\lambda\omega)$. Damit ist $\phi(i\lambda' i\lambda\omega)(\lambda'' i) = \lambda'' i\lambda' i\lambda\omega = (i\lambda' i * \varphi)(\lambda'' i)$, also $\phi(i\lambda' i\lambda\omega) = i\lambda' i * \phi(i\lambda\omega)$. Außerdem gilt $\phi(i\lambda\omega\lambda'\omega)(\lambda'' i) = \lambda'' i\lambda\omega\lambda'\omega = (\varphi * \omega\lambda'\omega)(\lambda'' i)$, also $\phi(i\lambda\omega\lambda'\omega) = \phi(i\lambda\omega) * \omega\lambda'\omega$.
$\Rightarrow \phi$ ist Modulisomorphismus. □

Bemerkung 10. *Im Beweis wird nicht verwendet, dass $\omega \in \Lambda$ gilt, das heißt es ist ausreichend, dass die Multiplikation $\lambda * \omega$ definiert ist für $\lambda \in \Lambda$.*

4.1 Umformulierung von Theorem 1

Als Korollar aus Theorem 1 erhält man:

Theorem 3. *Seien $R, e, f, g, \bar{e}, \bar{f}$ wie oben und $g_1, ..., g_n, \tilde{g} \in \sum_g'$,*

$$(1)\ 0 \longrightarrow \bar{e}Re \xrightarrow{\cdot\alpha} \bar{e}Rg_n \xrightarrow{\cdot\epsilon} \cdots \longrightarrow \bar{e}Rg_2 \xrightarrow{\cdot\phi} \bar{e}Rg_1 \xrightarrow{\cdot\beta} \bar{e}Rf \quad \text{und}$$

$$(2)\ 0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta\cdot} g_1R\bar{f} \xrightarrow{\phi\cdot} \cdots \longrightarrow g_{n-1}R\bar{f} \xrightarrow{\epsilon\cdot} g_nR\bar{f} \xrightarrow{\alpha\cdot} eR\bar{f}$$

exakte Sequenzen mit $\alpha \in eRg_n$ so dass $eR\tilde{g} \simeq \alpha R\tilde{g}\ \forall \tilde{g} \in \sum_g'$ und $\beta \in g_1Rf$ so dass $\tilde{g}Rf \simeq \tilde{g}R\beta\ \forall \tilde{g} \in \sum_g'$.

Dann sind $\bar{e}R\bar{e}$ und $\bar{f}R\bar{f}$ deriviert äquivalent, induziert durch einen Kippmodul T mit $pd_{\bar{e}R\bar{e}}(T) \leq n$.

$\cdot$ steht hier für Multiplikation mit dem besagten Element von links beziehungsweise rechts.

Bemerkung 11. *Falls $\cdot\beta$ in (1) surjektiv ist, dann ist $T = \bar{e}R\bar{f}$, allgemein gilt $T \subseteq \bar{e}R\bar{f}$.*

Beweis. Setze $C := R - mod$, $X := Re$, $M := Rg$, $Y := Rf$ und ψ, φ so, dass folgendes Diagramm kommutiert (auch wenn die Zeilen im Allgemeinen nicht exakt sind):

$$(3)\quad \begin{array}{ccccccccc} Re & \xrightarrow{\cdot\alpha} & Rg_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Rg_1 & \xrightarrow{\cdot\beta} & Rf \\ \| & & \| & & & & \| & & \| \\ X & \xrightarrow{\psi} & M_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Wegen $eR\tilde{g} \simeq \alpha R\tilde{g}\ \forall \tilde{g}$ gilt, dass

$$\begin{array}{ccccc} g_nR\tilde{g} & \xrightarrow{\alpha\cdot} & eR\tilde{g} & \longrightarrow & 0 \\ |\wr & \circlearrowleft & |\wr & & \\ Hom_R(Rg_n, R\tilde{g}) & \longrightarrow & Hom_R(Re, R\tilde{g}) & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & \\ Hom_{\mathscr{C}}(M_n, \tilde{M}) & \xrightarrow{\psi^*} & Hom_{\mathscr{C}}(X, \tilde{M}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in jeder Zeile exakt ist. [13]
$\Rightarrow \psi$ ist links-$add(M)$-Approximation von X.

Wegen $\tilde{g}Rf \simeq \tilde{g}R\beta\ \forall \tilde{g}$ gilt, dass

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{g}Rg_1 & \xrightarrow{\cdot\beta} & \tilde{g}Rf & \longrightarrow & 0 \\ |\wr & \circlearrowleft & |\wr & & \\ Hom_R(R\tilde{g}, Rg_1) & \longrightarrow & Hom_R(R\tilde{g}, Rf) & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & \\ Hom_{\mathscr{C}}(\tilde{M}, M_1) & \xrightarrow{\varphi_*} & Hom_{\mathscr{C}}(\tilde{M}, Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

[13] Die Isomorphien kommen von Lemma 2: $hR\tilde{g} = \bigoplus_{j=1}^{k}(hRt_j)^{\lambda_j} \simeq \bigoplus_{j=1}^{k} Hom_R(Rh, Rt_j)^{\lambda_j} \simeq Hom_R(Rh, R\tilde{g})$ für $h \in \{e, g_n\}$.

in jeder Zeile exakt ist.
$\Rightarrow \varphi$ ist rechts-$add(M)$-Approximation von Y.

Wende $Hom_R(R\bar{e}, -)$ auf (3) an und benutze die bekannten Isomorphien:

$$\begin{tikzcd}
\bar{e}Re \arrow[r, hook, "\cdot\alpha"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bar{e}Rg_n \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & \bar{e}Rg_1 \arrow[r, "\cdot\beta"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bar{e}Rf \arrow[d, "\wr"] \\
Hom_R(R\bar{e}, Re) \arrow[r, hook, "(\cdot\alpha)_*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_R(R\bar{e}, Rg_n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & Hom_R(R\bar{e}, Rg_1) \arrow[r, "(\cdot\beta)_*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_R(R\bar{e}, Rf) \arrow[d, "\wr"] \\
Hom_{\mathscr{C}}(V, X) \arrow[r, hook, "\psi_*"] & Hom_{\mathscr{C}}(V, M_n) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{C}}(V, M_1) \arrow[r, "\varphi_*"] & Hom_{\mathscr{C}}(V, Y)
\end{tikzcd}$$

Wende $Hom_R(-, R\bar{f})$ auf (3) an:

$$\begin{tikzcd}
fR\bar{f} \arrow[r, hook, "\beta\cdot"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & g_1R\bar{f} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & g_nR\bar{f} \arrow[r, "\alpha\cdot"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & eR\bar{f} \arrow[d, "\wr"] \\
Hom_R(Rf, R\bar{f}) \arrow[r, hook, "(\beta\cdot)^*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_R(Rg_1, R\bar{f}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & Hom_R(Rg_n, R\bar{f}) \arrow[r, "(\alpha\cdot)^*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_R(Re, R\bar{f}) \arrow[d, "\wr"] \\
Hom_{\mathscr{C}}(Y, W) \arrow[r, hook, "\varphi^*"] & Hom_{\mathscr{C}}(M_1, W) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{C}}(M_n, W) \arrow[r, "\psi^*"] & Hom_{\mathscr{C}}(X, W)
\end{tikzcd}$$

Die Exaktheit der oberen Zeilen ist jeweils nach Voraussetzung gegeben und liefert die gewünschte Exaktheit der unteren Zeile. Damit ist Theorem 1 anwendbar und $\bar{e}R\bar{e} \simeq End_{\mathscr{C}}(V)$ deriviert äquivalent zu $End_{\mathscr{C}}(W) \simeq \bar{f}R\bar{f}$. $\square$

Man kann Theorem 3 auch direkt beweisen. Der Beweis folgt im Wesentlichen dem Beweis von Theorem 1 in [5].

Beweis (direkt). Sei $\bar{g_1} := g_1 + g$.

Sei $T = coker(\cdot\phi) \oplus \bar{e}Rg$. Wegen der Exaktheit von (1) ist $T \subseteq \bar{e}Rf \oplus \bar{e}Rg = \bar{e}R\bar{f}$.

Zeige: T ist Kippmodul.

(1) liefert projektive Auflösung von T:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{e}Re \arrow[r, "\cdot\alpha"] & \bar{e}Rg_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bar{e}Rg_2 \arrow[r, "a:=\begin{pmatrix} \cdot\phi \\ 0 \end{pmatrix}"] & \bar{e}R\bar{g}_1 \arrow[r, "b:=\begin{pmatrix} \cdot\beta & 0 \\ 0 & \cdot g \end{pmatrix}"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wende $Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(-, \bar{e}Rg)$ auf diese Auflösung an:

$$\begin{tikzcd}
Hom(T, \bar{e}Rg) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}Rg) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & Hom(\bar{e}Rg_n, \bar{e}Rg) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom(\bar{e}Re, \bar{e}Rg) \arrow[d, "\wr"] \\
Hom(T, \bar{e}Rg) \arrow[r, hook] & \bar{g}_1Rg \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & g_nRg \arrow[r, two heads, "\alpha\cdot"'] & eRg
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist:

- linksexakt, da $Hom(-, \bar{e}Rg)$ linksexakt ist
- rechtsexakt durch Definition von α
- dazwischen folgt die Exaktheit aus (2): die Abbildungen in (2) funktionieren alle durch Linksmultiplikation, ändern also nichts „auf der rechten Seite von R“, das heißt Einschränkungen auf -Rg beziehungsweise -Rf bleiben exakt.

Demnach ist die obere Zeile exakt.
$\Rightarrow Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T, \bar{e}Rg) = 0 \ \forall i > 0$ und wegen Additivität von Ext ist auch $Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T, \bar{e}R\tilde{g}) = 0 \ \forall i > 0$, $\tilde{g} \in \sum'_g$.

Lange exakte Sequenzen sind aus kurzen exakten Sequenzen zusammengesetzt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \bar{e}Re \arrow[r] & \bar{e}Rg_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bar{e}Rg_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bar{e}Rg_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bar{e}R\bar{g}_1 \arrow[r] & T \arrow[r] & 0 \\
& & & K_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots & & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(T, -)$ auf die letzte kurze exakte Sequenz der projektiven Auflösung angewandt liefert nun:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & 0 \\ \| & & & & & & \| \\ Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T,\bar{e}R\bar{g}_1) & \longrightarrow & Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T,T) & \longrightarrow & Ext^{i+1}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_1) & \longrightarrow & Ext^{i+1}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,\bar{e}R\bar{g}_1) \end{array}$$

also $Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T,T) \simeq Ext^{i+1}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_1)\ \forall i > 0$.
Analog erhält man durch Anwenden von $Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(T,-)$ auf die $(n-j)$-te kurze exakte Sequenz: $Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_j) \simeq Ext^{i+1}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_{j+1})\ \forall i > 0$, $\forall 1 \leq j \leq n-1$
$\Rightarrow Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T,T) \simeq Ext^{i+1}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_1) \simeq Ext^{i+2}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_2) \simeq ...$
$... \simeq Ext^{i+n-1}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,K_{n-1}) \simeq Ext^{i+n}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,\bar{e}Re)\ \forall i > 0$.
Wegen $pd_{\bar{e}R\bar{e}}(T) \leq n$ gilt aber $Ext^{i+n}_{\bar{e}R\bar{e}}(T,\bar{e}Re) = 0\ \forall i > 0$ also $Ext^i_{\bar{e}R\bar{e}}(T,T) = 0\ \forall i > 0$.

Fehlt noch die $add(T)$-Koauflösung von $\bar{e}R\bar{e}$: dies ist die nach (1) exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bar{e}Re \oplus \bar{e}Rg (= \bar{e}R\bar{e}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \cdot\alpha & 0 \\ 0 & \cdot g \end{pmatrix}} \bar{e}Rg_n \oplus \bar{e}Rg \xrightarrow{(\cdot\epsilon,0)} \bar{e}Rg_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \bar{e}Rg_2 \xrightarrow{a} \bar{e}R\bar{g}_1 \xrightarrow{b} T \longrightarrow 0.$$

Damit ist T ein Kippmodul mit projektiver Dimension $\leq n$.

Zeige nun $End_{\bar{e}R\bar{e}}(T) \simeq \bar{f}R\bar{f}$:

Setze $l := \begin{cases} e & n = 1 \\ g_2 & n \geq 2 \end{cases}$

Sei $E = End(a)$, das heißt $E = \{(\nu,\mu) \in lRl \times \bar{g}_1R\bar{g}_1\ |a\mu = \nu a\}$, das heißt ν und μ lassen das Diagramm $\begin{array}{ccc} \bar{e}Rl & \xrightarrow{a} & \bar{e}R\bar{g}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\nu} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ \bar{e}Rl & \xrightarrow{a} & \bar{e}R\bar{g}_1 \end{array}$ kommutieren.

a bezeichne hier gleichzeitig die oben definierte Abbildung $\bar{e}Rg_2 \overset{\begin{pmatrix} \cdot\phi \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} \bar{e}R\bar{g}_1$

(beziehungsweise $\bar{e}Re \overset{\begin{pmatrix} \cdot\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightarrow} \bar{e}R\bar{g}_1$) und das dem entsprechende Element in $lR\bar{g}_1$.

Zeige dann $\bar{f}R\bar{f} \simeq E/I$, wobei $I = \{(\nu,\mu) \in E | \exists h \in \bar{g}_1 Rl : ha = \mu\}$

Wie bei a bezeichne b gleichzeitig die oben definierte Abbildung $\bar{e}R\bar{g}_1 \to \bar{e}R\bar{f}$ und das dementsprechende Element in $\bar{g}_1 R\bar{f}$. (Hier kann allerdings nicht einfach Lemma 2 angewandt werden, da hier $\Lambda = \bar{e}R\bar{e}$ und $\Lambda\bar{f} = \Lambda g \neq \bar{e}R\bar{f}$ gilt. Der Beweis von Lemma 2 gibt aber auch in diesem Fall die gewünschte Isomorphie: Injektivität ist klar.

Zur Surjektivität: sei $\varphi \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{f}) = Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R(\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j t_j), \bar{e}R\bar{f})$
$= \bigoplus\limits_{j=1}^{k}(Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rt_j, \bar{e}R\bar{f}))^{\lambda_j}$. Sei $\varphi_{j,i}$ $(i \in \{1,...,\lambda_j\})$ die jeweilige die Einschränkung auf $Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rt_j, \bar{e}R\bar{f})$. Dann ist $\varphi_{j,i}(\bar{e}rt_j) = \varphi_{j,i}(\bar{e}r\bar{e}t_j) = \bar{e}r\bar{e}\varphi_{j,i}(t_j)$, also ist $\varphi_{j,i}$ gegeben durch das Bild von t_j. Sei $\varphi_{j,i}(t_j) = \bar{e}r_1\bar{f}$, dann gilt $\bar{e}r_1\bar{f} = \varphi_{j,i}(t_j) = \varphi_{j,i}(t_j^2) = t_j\varphi_{j,i}(t_j) = t_j\bar{e}r_1\bar{f} = t_jr_1\bar{f} \Rightarrow \varphi_{j,i}(\bar{e}rt_j) = \bar{e}rt_jr_1\bar{f} \Rightarrow \varphi_{j,i} = \Phi(t_jr_1\bar{f})$, wobei Φ wie in Lemma 2 sei. Nimmt man alle $\varphi_{j,i}$ zusammen ergibt das $\varphi = \Phi(\bar{g}_1R\bar{f})$.)

Nach (2) ist die Sequenz $0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta\cdot} g_1R\bar{f} \xrightarrow[oder\,\alpha\cdot]{\phi\cdot} lR\bar{f}$ exakt, und damit auch die Sequenz

$$(4)\quad 0 \longrightarrow \bar{f}R\bar{f} \xrightarrow{b\cdot} \bar{g}_1R\bar{f} \xrightarrow{a\cdot} lR\bar{f}$$
$$\bar{f} \longmapsto (b\bar{f} =)b \longmapsto ab = 0.$$

Seien nun $(\nu,\mu) \in E$, dann $a\mu b = \nu ab = 0 \Rightarrow \mu b \in ker(a\cdot) = im(b\cdot)$, aber $b\cdot$ ist injektiv nach (4), also $\exists! q \in \bar{f}R\bar{f}$ mit $bq = \mu b$. Damit kann man den Ringhomomorphismus $\eta : E \to \bar{f}R\bar{f}, (\nu,\mu) \mapsto q$ definieren.

η ist surjektiv:
Nach Voraussetzung gilt $\tilde{g}Rf \simeq \tilde{g}R\beta$. Das ist gleichbedeutend mit $\cdot\beta \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rg_1, \bar{e}Rf) \simeq g_1Rf$ ist surjektiv.
$\Rightarrow b \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{f}) \simeq \bar{g}_1R\bar{f}$ mit $b : \begin{pmatrix} \bar{e}r_1g_1 \\ \bar{e}r_2g \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{e}r_1\beta \\ \bar{e}r_2g \end{pmatrix}$ ist sur-

jektiv und damit ist $\bar{g}_1 R\bar{f} \simeq \bar{g}_1 Rb$.

Sei $q \in \bar{f}R\bar{f}$ beliebig. Dann ist $bq \in \bar{g}_1 R\bar{f} \simeq \bar{g}_1 Rb \Rightarrow \exists \mu \in \bar{g}_1 R\bar{g}_1 : bq = \mu b$.

Aus (1) folgt: $\bar{e}Rl \xrightarrow{a} \bar{e}R\bar{g}_1 \xrightarrow{b} \bar{e}R\bar{f}$ ist exakt.
Anwenden von $Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, -)$ liefert dann, dass

$$(5)\quad \begin{tikzcd} Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}Rl) \arrow[r, "a_*"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}R\bar{g}_1) \arrow[r, "b_*"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}R\bar{f}) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ lRl \arrow[r, "\cdot a"] & lR\bar{g}_1 \arrow[r, "\cdot b"] & lR\bar{f} \\ & a\mu \arrow[r, mapsto] & a\mu b = abq = 0 \end{tikzcd}$$

exakt ist. Also $a\mu \in ker(\cdot b) = im(\cdot a) \Rightarrow \exists \nu \in lRl : \nu a = a\mu \Rightarrow \eta$ ist surjektiv.

Bestimme $ker(\eta)$:
Anwenden von $Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, -)$ auf $\bar{e}Rl \xrightarrow{a} \bar{e}R\bar{g}_1 \xrightarrow{b} \bar{e}R\bar{f}$ liefert:

$$(6)\quad \begin{tikzcd} Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}Rl) \arrow[r, "a_*"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{g}_1) \arrow[r, "b_*"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{f}) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \bar{g}_1 Rl \arrow[r, "\cdot a"] & \bar{g}_1 R\bar{g}_1 \arrow[r, "\cdot b"] & \bar{g}_1 R\bar{f} \end{tikzcd}$$

Sei $(\nu, \mu) \in ker(\eta)$, dann ist $\eta(\nu, \mu) = q = 0$ und $bq = \mu b$, also $\mu b = 0$ $\Rightarrow \mu \in ker(\cdot b) = im(\cdot a) \Rightarrow \exists h \in \bar{g}_1 Rl : ha = \mu \Rightarrow (\nu, \mu) \in I$. Andererseits gilt für $(\nu, \mu) \in I : (\nu, \mu) = (\nu, ha), \eta : (\nu, ha) \mapsto q$ mit $bq = hab = 0$. Wegen (4) ist $b\cdot$ injektiv, und damit $q = 0 \Rightarrow (\nu, \mu) \in ker(\eta) \Rightarrow ker(\eta) = I \underset{Homomorphiesatz}{\Longrightarrow} \bar{f}R\bar{f} \simeq E/I$.

Wir haben $\bar{e}Rl \xrightarrow{a} \bar{e}R\bar{g}_1 \xrightarrow{b} T \longrightarrow 0$ exakt und damit

$$(7)\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & End_{\bar{e}R\bar{e}}(T) \arrow[r, "b^*"] & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, T) \arrow[r, "a^*"] & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, T) \\ & id \arrow[r, mapsto] & b \arrow[r, mapsto] & ab = 0 \\ & t \arrow[r, mapsto] & bt \arrow[r, mapsto] & abt = 0 \end{tikzcd} \text{ exakt.}$$

Betrachte $(\nu, \mu) \in E : Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl.T) \ni a\mu b = \nu ab = 0 \Rightarrow \mu b \in ker(a^*) = im(b^*)$. Da b^* injektiv ist, folgt: $\exists! \bar{q} \in End_{\bar{e}R\bar{e}}(T) : b\bar{q} = \mu b$

$\Rightarrow \bar{\eta}: E \to End_{\bar{e}R\bar{e}}(T), (\nu, \mu) \mapsto \bar{q}$ mit $b\bar{q} = \mu b$ ist wohldefinierter Ringhomomorphismus.

$\bar{\eta}$ ist surjektiv:
Sei $\bar{q} \in End_{\bar{e}R\bar{e}}(T)$ beliebig.
$b\bar{q} \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, T) \subseteq Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{f}) \simeq \bar{g}_1 R\bar{f} \simeq \bar{g}_1 Rb$ wie schon bei dem Beweis zur Surjektivität von η zu sehen war. $b\bar{q} \in \bar{g}_1 Rb$ und $b \in \bar{g}_1 Rb$ implizieren dann: $\exists \mu \in \bar{g}_1 R\bar{g}_1 \simeq Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{g}_1) : b\bar{q} = \mu b$.

Benutze erste Zeile in (5):

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}Rl) & \xrightarrow{a_*} & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}R\bar{g}_1) & \xrightarrow{b_*} & Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}R\bar{f}) \\ & & a\mu & \longmapsto & a\mu b = ab\bar{q} = 0 \end{array}$$

also $a\mu \in ker(b_*) = im(a_*) \Rightarrow \exists \nu \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}Rl) : a\mu = \nu a$
$\Rightarrow (\nu, \mu) \in \bar{E} := \{(\rho, \varrho) \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}Rl, \bar{e}Rl) \times Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{g}_1) | a\varrho = \rho a\} \simeq E$.
Damit ist auch $\bar{\eta}$ surjektiv.

Seien $(\nu, \mu) \in ker(\bar{\eta})$ beliebig. Dann $\bar{q} = 0$ für $\bar{q}$ mit $b\bar{q} = \mu b \Rightarrow \mu b = 0$
$\Rightarrow \mu \in ker(b_*) = im(a_*)$.
Mit (6) folgt: $\exists h \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}Rl) \simeq \bar{g}_1 Rl : ha = \mu$
$\Rightarrow (\nu, \mu) \in \bar{I} := \{(\rho, \varrho) \in \bar{E} | \exists h \in Hom_{\bar{e}R\bar{e}}(\bar{e}R\bar{g}_1, \bar{e}R\bar{g}_1) : ha = \varrho\} \simeq I$.
Andererseits gilt für $(\nu, \mu) \in I : (\nu, \mu) = (\nu, ha)$ und $\bar{\eta} : (\nu, ha) \mapsto \bar{q}$ mit $b\bar{q} = hab = 0$
$\Rightarrow \bar{q} \in ker(b^*)$
$\Rightarrow \bar{q} = 0$, da (b^*) injektiv nach (7)
$\Rightarrow (\nu, \mu) \in ker(\bar{\eta}) \Rightarrow ker(\bar{\eta}) = I \underset{Homomorphiesatz}{\Longrightarrow} End_{\bar{e}R\bar{e}}(T) \simeq E/I$
$\Rightarrow End_{\bar{e}R\bar{e}}(T) \simeq E/I \simeq \bar{f}R\bar{f}$ □

Ich habe Theorem 3 als „Umformulierung von Theorem 1“ bezeichnet. Bisher ist es jedoch nur eine Folgerung, wahlweise auch ein eigenständiger Satz. Um wirklich eine Umformulierung zu bekommen, müssen die Theoreme äquivalent sein. Dazu fehlt noch, dass auch Theorem 1 eine Folgerung aus Theorem 3 darstellt. Da Theorem 3 auch unabhängig von Theorem 1 bewiesen wurde, erzeugt man hierdurch keinen Zirkelschluss, sondern eine echte Äquivalenz der Theoreme.

Satz. *Theorem 1 ist ein Korollar aus Theorem 3.*

Beweis. Setze $R := End_{\mathscr{C}}(X \oplus M \oplus Y)$ und e :=Projektion auf X, g :=Projektion auf M, f :=Projektion auf Y.
Betrachte die Bimoduln

- $\bar{e}Re \simeq \{X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{\bar{e}} X \oplus M \xrightarrow{r|_{X \oplus M}} X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{e} X j r \in R\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(V, X)$

- $\bar{e}Rg_i \simeq \{X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{\bar{e}} X \oplus M \xrightarrow{r^{k_i}|_{X \oplus M}} (X \oplus M \oplus Y)^{k_i} \xrightarrow{g_i} M_i j r^{k_i} \in R^{k_i}\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(V, M_i)$

- $\bar{e}Rf \simeq \{X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{\bar{e}} X \oplus M \xrightarrow{r|_{X \oplus M}} X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{f} Y j r \in R\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(V, Y)$

- $fR\bar{f} \simeq \{X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{r|_Y} X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{\bar{f}} M \oplus Y j r \in R\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(Y, W)$

- $g_iR\bar{f} \simeq \{(X \oplus M \oplus Y)^{k_i} \xrightarrow{g_i} M_i \xrightarrow{r|_{M_i}} X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{\bar{f}} M \oplus Y j r \in R\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(M_i, W)$

- $eR\bar{f} \simeq \{X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{e} X \xrightarrow{r|_X} X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{\bar{f}} M \oplus Y j r \in R\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(X, W)$

wobei k_i der höchste vorkommende Exponent eines unzerlegbaren Summanden von M_i und $\bar{e}, \bar{f}$ wie zuvor definiert seien.

Ebenso gilt:

- $eRg_n \simeq \{X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{e} X \xrightarrow{r^{k_n}|_X} (X \oplus M \oplus Y)^{k_n} \xrightarrow{g_n} M_n j r^{k_n} \in R^{k_n}\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(X, M_n)$

- $g_1Rf \simeq \{(X \oplus M \oplus Y)^{k_1} \xrightarrow{g_1} M_1 \xrightarrow{r^{k_1}|_{M_1}} X \oplus M \oplus Y \xrightarrow{f} Y j r^{k_1} \in R^{k_1}\} \simeq Hom_{\mathscr{C}}(M_1, Y)$

Seien α das Urbild von ψ und β von φ.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(V,X) \arrow[r, hook, "\psi_*"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\mathscr{C}}(V,M_n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{C}}(V,M_1) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\mathscr{C}}(V,Y) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\bar{e}Re \arrow[r, hook, "\cdot\alpha"] & \bar{e}Rg_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bar{e}Rg_1 \arrow[r, "\cdot\beta"] & \bar{e}Rf
\end{tikzcd}$$

Damit ist auch die untere Zeile exakt. Ebenso ist auch

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(Y,W) \arrow[r, hook, "\varphi^*"] \arrow[d, dash, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\mathscr{C}}(M_1,W) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"] & \cdots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{C}}(M_n,W) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, dash, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_{\mathscr{C}}(X,W) \arrow[d, dash, "\wr"] \\
fR\bar{f} \arrow[r, hook, "\beta\cdot"] & g_1R\bar{f} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & g_nR\bar{f} \arrow[r, "\alpha\cdot"] & eR\bar{f}
\end{tikzcd}$$

kommutativ, also wieder die untere Zeile exakt. Aus Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(M_n,\tilde{M}) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, dotted, dash, "\wr"] & Hom_{\mathscr{C}}(X,\tilde{M}) \arrow[r] \arrow[d, dotted, dash, "\wr"] & 0 \\
g_nR\tilde{g} \arrow[r, "\alpha\cdot"] & eR\tilde{g} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

für beliebiges $\tilde{M}$ folgt: $eR\tilde{g} \simeq im(\alpha\cdot) = \alpha R\tilde{g}\ \forall\tilde{g}$. ($\tilde{g}$ "Projektion" auf $\tilde{M}$) und aus Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(\tilde{M},M_1) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, dotted, dash, "\wr"] & Hom_{\mathscr{C}}(\tilde{M},Y) \arrow[r] \arrow[d, dotted, dash, "\wr"] & 0 \\
\tilde{g}Rg_1 \arrow[r, "\cdot\beta"] & \tilde{g}Rf \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

für beliebiges $\tilde{M}$ folgt: $\tilde{g}Rf \simeq im(\cdot\beta) = \tilde{g}R\beta\ \forall\tilde{g}$.

Damit sind die Voraussetzungen für Theorem 2 erfüllt, das heißt es gilt: $End_{\mathscr{C}}(V) \simeq \bar{e}R\bar{e}$ deriviert äquivalent zu $\bar{f}R\bar{f} \simeq End_{\mathscr{C}}(W)$. $\square$

Die Theoreme 1 und 3 sind also äquivalent und damit ist Theorem 3 eine Umformulierung von Theorem 1.
Bei Theorem 1 war der Spezialfall $n = 1$ sehr wichtig. Fordert man dort zusätzlich, dass die Sequenz $0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ exakt ist, so bekommt man Theorem 2 und damit interessante Anwendungen. In die Ringversion ist dies leider nicht so einfach zu übersetzen:
Will man Theorem 2 in die Ringsprache übersetzen, so setzt man laut dem ersten Beweis von Theorem 3 $\mathscr{C} = R - mod$ und $X = Re$, $M = Rg$, $Y = Rf$. X, M und Y sind also projektive Ringmoduln. Da für die Ringversion keine Sequenz entsprechend $0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ vorausgesetzt wird, liefert die Projektivität keine Probleme. Es ist dadurch jedoch nicht so leicht auch die Exaktheit, die ja eine zusätzliche Voraussetzung darstellt, zu übersetzen.

4.2 Beispiele

Beispiel 5. *Die derivierte Äquivalenz von* $k \bullet \xleftarrow[\xi_3]{} \bullet \xleftarrow[\xi_2]{} \bullet \xleftarrow[\xi_1]{} \bullet \, / < \xi_1\xi_2\xi_3 >$

und kQ/I *für* $Q =$

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "\zeta_2"'] & \\ \bullet & & \bullet \arrow[ul, "\zeta_1"'] \arrow[dl, "\zeta_3"] \\ & \bullet \arrow[ul, "\zeta_4"] & \end{tikzcd}$$

und $I =< \zeta_1\zeta_2 - \zeta_3\zeta_4 >$ *wurde bereits in Kapitel 3.2 mit Hilfe von beinahe* $\mathscr{D}$*-zerfallenden Sequenzen im Sinne von Theorem 1 gezeigt. Da Theorem 1 und 3 äquivalent sind, sollte auch Theorem 3 genutzt werden können, um diese Äquivalenz zu zeigen:*

Betrachte die Wegealgebra $R = kQ/ < \gamma_1\gamma_2 - \delta\alpha, \alpha\beta, \gamma_1\gamma_2\beta >$

$= kQ/ < \gamma_1\gamma_2 - \delta\alpha, \alpha\beta >$ *des Köchers* $Q =$

$$\begin{tikzcd} & & g_2 \arrow[dl, "\gamma_2"'] & \\ f & g_3 \arrow[l, "\beta"] & & g_1 \arrow[ul, "\gamma_1"'] \arrow[dl, "\delta"] \\ & & e \arrow[ul, "\alpha"] & \end{tikzcd} .$$

Die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{e}Re & \xrightarrow{\alpha} & \bar{e}Rg_3 & \xrightarrow{\beta} & \bar{e}Rf & \longrightarrow & 0 \\ & & (g_1 \to e) & \longmapsto & (g_1 \to g_3) & \longmapsto & (g_1 \to f) = 0 & & \\ & & e & \longmapsto & (e \to g_3) & \longmapsto & (e \to f) = 0 & & \\ & & & & (g_2 \to g_3) & \longmapsto & (g_2 \to f) & & \\ & & & & g_3 & \longmapsto & (g_3 \to f) & & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & fR\bar{f} & \xrightarrow{\beta} & g_3R\bar{f} & \xrightarrow{\alpha} & eR\bar{f} & \longrightarrow & 0 \\ & & f & \longmapsto & (g_3 \to f) & \longmapsto & (e \to f) = 0 & & \\ & & & & g_3 & \longmapsto & (e \to g_3) & & \end{array}$$

sind exakt und es gilt:
$eRg_1 = 0 = \alpha Rg_1$, $eRg_2 = 0 = \alpha Rg_2$, $eRg_3 = \alpha k = \alpha Rg_3 \Rightarrow eR\tilde{g} = \alpha R\tilde{g}$ $\forall \tilde{g} \in \sum_g'$ *und* $g_1Rf = 0 = g_1R\beta$, $g_2Rf = g_2R\beta$, $g_3Rf = k\beta = g_3R\beta \Rightarrow$

$\tilde{g}Rf = \tilde{g}R\beta \ \forall \tilde{g} \in \sum'_g$.

Nach Theorem 3 folgt $\bar{e}R\bar{e} = k \bullet \xleftarrow{\xi_3} \bullet \xleftarrow{\xi_2} \bullet \xleftarrow{\xi_1} \bullet \ / < \xi_1\xi_2\xi_3 >$ *und*

$$k \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "\zeta_2"'] & \\ \bullet & & \bullet \arrow[ul, "\zeta_1"'] \arrow[dl, "\zeta_3"] \\ & \bullet \arrow[ul, "\zeta_4"] & \end{tikzcd} / < \zeta_1\zeta_2 - \zeta_3\zeta_4 >= \bar{f}R\bar{f}$$ *sind deriviert äquivalent.*

Beispiel 6. *Sei* Q *der Köcher*

$$\begin{tikzcd} & g_1 \arrow[dr, "\phi_1"] & & \\ e \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & g_3 \arrow[r, "\beta"] & f \\ & g_2 \arrow[ur, "\phi_2"'] & & \end{tikzcd}$$

und $R = kQ/ < \alpha_1\phi_1 - \alpha_2\phi_2, \phi_1\beta, \phi_2\beta >$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

Betrachte die exakten Sequenzen:

$$0 \to \bar{e}Re \xrightarrow{\alpha} \bar{e}R(g_1 + g_2) \xrightarrow{\phi} \bar{e}Rg_3 \xrightarrow{\beta} \bar{e}Rf \longrightarrow 0$$

$$e \longmapsto (e \to g_1) - (e \to g_2) \longmapsto 0$$

$$(e \to g_1) \longmapsto (e \to g_3) \mapsto (e \to f) = 0$$

$$(e \to g_2) \longmapsto (e \to g_3) \mapsto (e \to f) = 0$$

$$g_1 \longmapsto (g_1 \to g_3) \mapsto (g_1 \to f) = 0$$

$$g_2 \longmapsto (g_2 \to g_3) \mapsto (g_2 \to f) = 0$$

$$g_3 \longmapsto (g_3 \to f)$$

$$0 \to fR\bar{f} \xrightarrow{\beta} g_3R\bar{f} \xrightarrow{\phi} (g_1+g_2)R\bar{f} \xrightarrow{\alpha} eR\bar{f} \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto (g_3 \to f) \mapsto (g_1 \to f) + (g_2 \to f) = 0$$

$$g_3 \longmapsto (g_1 \to g_3) + (g_2 \to g_3) \longmapsto 0$$

$$(g_1 \to g_3) \longmapsto (e \to g_3)$$

$$(g_2 \to g_3) \longmapsto -(e \to g_3)$$

$$g_1 \longmapsto (e \to g_1)$$

$$g_2 \longmapsto (e \to g_2)$$

α und β erfüllen die gewünschte Eigenschaft:
$eRg_1 =< \alpha_1 >\simeq< \alpha g_1 >= \alpha Rg_1$
$eRg_2 =< \alpha_2 >\simeq< \alpha(-g_2) >= \alpha Rg_2$
$eRg_3 =< \alpha_1\phi_1 >\simeq< \alpha\phi_1 g_3 >=< \alpha\phi_2 g_3 >= \alpha Rg_3$
$g_1Rf = 0 = g_1R\beta$
$g_2Rf = 0 = g_2R\beta$
$g_3Rf = g_3R\beta$

Theorem 3 ist demnach anwendbar, das heißt wir haben $\bar{e}R\bar{e} =$

$$k\; \begin{tikzcd} & g_1 \arrow[dr, "\phi_1"] & \\ e \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & g_3 \\ & g_2 \arrow[ur, "\phi_2"'] & \end{tikzcd} \Big/ < \alpha_1\Phi_1 - \alpha_2\Phi_2 >$$

und $\bar{f}R\bar{f} =$

$$k\; \begin{tikzcd} g_1 \arrow[dr, "\phi_1"] & & \\ & g_3 \arrow[r, "\beta"] & f \\ g_2 \arrow[ur, "\phi_2"'] & & \end{tikzcd} \Big/ < \Phi_1\beta, \Phi_2\beta >$$

sind deriviert äquivalent.

Dieses Beispiel ist sehr leicht zu verallgemeinern: Man ersetze einfach α_1 und α_2 durch endlich viele α_i:

Sei Q der Köcher

$$\begin{tikzcd}
 & g_1 \arrow[ddr, "\phi_1"] & & \\
 & g_2 \arrow[dr, "\phi_2"'] \arrow[dd, dash, dotted] & & \\
e \arrow[uur, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & g_{n+1} \arrow[r, "\beta"] & f \\
 & g_n \arrow[ur, "\phi_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

und $R = kQ/ < \{\alpha_i\phi_i - \alpha_{i+1}\phi_{i+1}, \phi_i\beta | i = 1, ..., n\} >$.
Seien $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_i$ für n gerade,
$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + (\sum\limits_{i=4}^{n}(-1)^i\alpha_i)$ für n ungerade
und $\phi = \sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i$.

Betrachte die Sequenz $0 \to \bar{e}Re \xrightarrow{\alpha} \bar{e}R(\sum\limits_{i=1}^{n}g_i) \xrightarrow{\phi} \bar{e}Rg_{n+1} \xrightarrow{\beta} \bar{e}Rf \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
e &\longmapsto \alpha \longmapsto \alpha\phi \\
\alpha_i &\longmapsto \alpha_i\phi_i \longmapsto \alpha_i\phi_i\beta = 0 \\
g_i &\longmapsto \phi_i \longmapsto \phi_i\beta = 0 \\
g_{n+1} &\longmapsto \beta
\end{aligned}$$

Im Fall n gerade, ist $\alpha\phi = (\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_i\phi_i = 0$.
Falls n ungerade ist, so ist $\alpha\phi = (-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\phi_2) + (\frac{1}{2}\alpha_2\phi_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\phi_3) + \sum\limits_{i=4}^{n}(-1)^i\alpha_i\phi_i = 0$, das heißt die Sequenz ist in beiden Fällen exakt.

Die Sequenz $0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta} g_{n+1}R\bar{f} \xrightarrow{\phi} (\sum\limits_{i=1}^{n}g_i)R\bar{f} \xrightarrow{\alpha} eR\bar{f} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
f &\longmapsto \beta \longmapsto \phi\beta = 0 \\
g_{n+1} &\longmapsto \phi \longmapsto \alpha\phi = 0 \\
\phi_i &\longmapsto (-1)^i\alpha_i\phi_i \\
g_i &\longmapsto (-1)^i\alpha_i
\end{aligned}$$

ist auch exakt.

Auch hier erfüllen α und β die Eigenschaft $eR\tilde{g} = \alpha R\tilde{g}$ beziehungsweise

$\tilde{g}Rf = \tilde{g}R\beta$ *für beliebiges* $\tilde{g} \in \sum'_g$*:*

$eRg_i =< \alpha_i >\simeq< \alpha g_i >= \alpha Rg_i$ *für* $i = 1, ..., n$
$eRg_{n+1} =< \alpha_i\phi_i >\simeq< \alpha_i\phi_i g_{n+1} >\simeq \alpha Rg_{n+1}$
$g_iRf = 0 = g_iR\beta$ *für* $i = 1, ..., n$
$g_{n+1}Rf = g_{n+1}R\beta$

also ist nach Theorem 3 $\bar{e}R\bar{e} = kQ/I$ *mit* $Q =$
$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \bullet \arrow[ddr, "\phi_1"] & \\
 & \bullet \arrow[dr, "\phi_2"'] \arrow[dd, dotted, no head] & \\
\bullet \arrow[uur, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, "\phi_n"'] &
\end{tikzcd}$$
und

$I =< \{\alpha_i\phi_i - \alpha_{i+1}\phi_{i+1} | i = 1, ..., n\} >$ *deriviert äquivalent zu* $\bar{f}R\bar{f} = k\hat{Q}/\hat{I}$

mit $\hat{Q} =$
$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\bullet \arrow[ddr, "\phi_1"] & & \\
\bullet \arrow[dr, "\phi_2"'] \arrow[dd, dotted, no head] & & \\
 & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\phi_n"'] & &
\end{tikzcd}$$
und $\hat{I} =< \{\phi_i\beta | i = 1, ..., n\} >$.

4.2.1 Algorithmus

Das obige Beispiel lässt die Frage aufkommen, ob man zu einer (beliebigen) Quelle immer eine (passende) Senke hinzufügen kann, so dass damit eine derivierte Äquivalenz erzeugt wird. Dieser Frage werde ich nun nachgehen. Wie immer stehen dabei die griechischen Buchstaben sowohl für die Pfeile im Köcher, also die Wege in der Köcheralgebra S, als auch für die dementsprechenden Abbildungen von S-Moduln.

Damit $\alpha : \bar{e}Re \to \bar{e}Rg_1$ derart ist, dass $eR\tilde{g} \simeq \alpha R\tilde{g}$ gilt, muss jeder Punkt, der von e durch einen Pfeil erreichbar ist, als Summand in g_1 vorkommen. Ebenso muss, damit $\beta : \bar{e}Rg_n \to \bar{e}Rf$ derart ist, dass $\tilde{g}Rf \simeq \tilde{g}R\beta$ gilt, jeder Punkt , der nur einen Pfeil von f entfernt ist, als Summand in g_n vorkommen. Des Weiteren muss die Sequenz exakt sein, das heißt α muss im Kern der nachfolgenden Abbildung liegen. Eine Konstruktionsvorschrift für eine solche Sequenz, die der erste Schritt für die derivierte Äquivalenz nach Theorem 3 ist, ist im nachfolgenden Algorithmus gegeben:

Input: Köcher Q mit Relationen ρ, $S = kQ/\rho$

1. Suche eine Quelle e. Nenne die Summe der anderen Punkte g. Dann ist $1 = e + g = \bar{e}$ und $S = \bar{e}S\bar{e}$. Es gilt sogar $S = \bar{e}R\bar{e}$ für jede Algebra $R = kQ'$ mit $Q'_0 \supseteq Q_0$ und $Q'_1 \supseteq Q_1$.

2. Nehme alle Pfeile, die von e ausgehen. Nenne diese α_i $(i = 1, ..., m_1)$.

   Addiere die Endpunkte $g_{1,i}$ dieser α_i zu g_1 auf. Setze $\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{m_1}\alpha_{m_1} \end{pmatrix}$,
   wobei die $\lambda_i \neq 0$ so gewählt werden müssen, dass α im nächsten Schritt annulliert werden kann.

Wiederhole den folgenden Schritt so oft wie möglich:

3. Sei $0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\phi_1} \cdots \xrightarrow{\phi_{k-1}} Sg_k$ bereits bestimmte exakte Sequenz. Jetzt muss $\phi_k : Sg_k \to Sg_{k+1}$ so bestimmt werden, dass $im(\phi_{k-1})$ $= ker(\phi_k)$ gilt. Betrachte dafür alle Pfeile $\phi_{k-1,j}$ einzeln. Jetzt muss es ent- weder eine Nullrelation geben, die mit $\phi_{k-1,j}$ beginnt, oder es gibt einen Punkt $g_{k,j}$, der sowohl von $g_{k-1,j}$ als auch von einem anderen Punkt $g_{k-1,i}$ erreichbar ist, und die Differenz dieser Wege, jeweils mit $\phi_{k-1,j}$ beziehungsweise $\phi_{k-1,i}$ vorangestellt, ist eine Relation. Im zweiten Fall sollten $\phi_{k,j}$ und $\phi_{k,i}$ jeweils die Wege von $g_{k-1,j}$ beziehungsweise $g_{k-1,i}$ zu $g_{k,j}$ sein. Im ersten Fall wird $\phi_{k,j}$ als die Nullrelation ohne $\phi_{k-1,j}$ gesetzt. Manchmal gibt es auch mehrere Relationen, die die Bedingungen erfüllen. In dem Fall müssen alle Möglichkeiten ausprobiert werden, da sie eventuell Auswirkungen auf andere $\phi_{k-1,i}$ haben. Gibt es keine Relation, die mit $\phi_{k-1,j}$ beginnt, so gibt es kein $\phi_k : Sg_k \to Sg_{k+1}$ mit $\phi_{k-1}\phi_k = 0$.
   Die Pfeile sollten immer zu neuen Endpunkten hinführen, damit die Sequenz azyklisch ist, also kein Modul mehrfach auftaucht. Dies macht es leichter, die Exaktheit der Sequenz zu sichern.
   Es gilt nun $im(\phi_{k-1}) \subseteq ker(\phi_k)$.

Gilt Gleichheit, so ist für $g_{k+1} = \sum_{j=1}^{m_k} t(\phi_{k,j})$ die Sequenz $0 \to Se \to \cdots \xrightarrow{\phi_{k-1}} Sg_k \xrightarrow{\phi_k} Sg_{k+1}$ exakt. Hier soll $t(\phi_{k,j})$ der Punkt sein, an dem der Weg $\phi_{k,j}$ endet. Für einzelne Pfeile ist das genau das t aus der Definition eines Köchers.

Wiederhole Schritt 3 mit $k = k + 1$.

Gilt jedoch keine Gleichheit und alle Relationen wurden bereits bedacht, so kann es kein solches ϕ_k geben.
Insgesamt gibt es also zwei Fälle, bei denen ein solches ϕ_k nicht existiert: Entweder es gibt keine mit $\phi_{k-1,j}$ startende Relation oder der Kern des potentiellen ϕ_k ist zu groß. Einer der beiden Fälle wird bei einem endlichen Köcher irgendwann auftreten. Fahre dann mit Schritt 4 fort.

4. Füge einen neuen Punkt f zu Q_0 und neue Pfeile $\beta_j : g_{k,j} \to f$ zu Q_1 hinzu. Füge geeignete Relationen, die $\phi_{k-1,j}\beta_j = 0$ garantieren, zu ρ hinzu[14]. Nenne den neuen Köcher Q' und das neue Relationen-Ideal ρ'. Setze $R = kQ'/\rho'$[15].
   Gilt nun $im(\phi_{k-1}) = ker(\beta)$, so ist die Sequenz $0 \to Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\phi_1} \cdots \xrightarrow{\phi_{k-1}} Sg_k \xrightarrow{\beta} Sf$ exakt.

   Gehe zu Schritt 5.

   Falls keine solchen β_j existieren, die die Sequenz exakt machen, so kann man auf diese Weise keine derivierte Äquivalenz ausmachen.

   Breche den Algorithmus mit einer Fehlermeldung ab.

5. Sei $0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\phi_1} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-1}} Sg_n \xrightarrow{\beta} Sf$ die in Schritt 4 berechnete exakte Sequenz. Überprüfe ob für $\bar{f} = f + g$ auch die Sequenz $0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta} g_nR\bar{f} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\phi_1} g_1R\bar{f} \xrightarrow{\alpha} eR\bar{f}$ exakt ist. Trifft dies zu, so sind $S = \bar{e}R\bar{e}$ und $\bar{f}R\bar{f}$ deriviert äquivalent.

[14] Oft reichen die Relationen $\phi_{k-1,j}\beta_j$ aus, manchmal braucht man jedoch andere Relationen für die Exaktheit.
[15] Dann gilt $S = \bar{e}R\bar{e}$ und $\bar{f}R\bar{f}$ ist die Algebra zu dem Köcher mit Punkt f und ohne Punkt e ($\bar{f} = f + g$).

Beispiel 7. *Sei* $Q =$
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$
und

$\rho =< \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_5\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_6\gamma_3\gamma_4 - \gamma_7 >$.

1. Möglichkeit

1.
$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "\alpha_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$
$$\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1$$
$$e \longmapsto \alpha$$

3. $\alpha = \alpha_1$
$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "\alpha_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\phi_1"] & g_2 \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\phi_1} Sg_2$$
$$e \longmapsto \alpha_1 \longmapsto \alpha_1\phi_1 = \gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\gamma_5 \longmapsto \gamma_5\phi_1 = \gamma_5\gamma_2$$
$$g_1 \longmapsto \phi_1$$

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "\alpha_1"] & & & g_3 \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\phi_1"] & g_2 \arrow[ur, "\phi_2"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"] &
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\phi_1} Sg_2 \xrightarrow{\phi_2} Sg_3$$

$$g_1 \longmapsto \phi_1 \longmapsto \phi_1\phi_2 = \gamma_2\gamma_3 \neq 0 \lightning$$

Die Sequenz bis Sg_3 ist nicht exakt, aber dies war die einzige Möglichkeit g_3 zu wählen. Also muss f jetzt hinzugefügt werden.

4. $Q' =$

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "\alpha_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\phi_1"] & g_2 \arrow[ur, "\gamma_3"] \arrow[d, "\beta"'] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & f & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"] &
\end{tikzcd}$$

$, \rho' = \rho \cup < \phi_1\beta >, R = kQ'/\rho'$

$$\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\phi_1} Sg_2 \xrightarrow{\beta} Sf$$

$$e \longmapsto \alpha_1 \longmapsto \alpha_1\phi_1 = \gamma_1\gamma_2 = 0$$

$$\gamma_5 \longmapsto \gamma_5\phi_1 \longmapsto \gamma_5\phi_1\beta = 0$$

$$g_1 \longmapsto \phi_1 \longmapsto \phi_1\beta = 0$$

$$g_2 \longmapsto \beta$$

5. $0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta} g_2R\bar{f} \xrightarrow{\phi_1} g_1R\bar{f} \xrightarrow{\alpha} eR\bar{f}$ *ist exakt, also*

$$f \longmapsto \beta \longmapsto \phi_1\beta = 0$$

$$\gamma_3 \longmapsto \phi_1\gamma_3 \longmapsto \alpha_1\phi_1\gamma_3 = 0$$

$$\gamma_3\gamma_4 \longmapsto \phi_1\gamma_3\gamma_4 \longmapsto \alpha_1\phi_1\gamma_3\gamma_4 = 0$$

$$g_2 \longmapsto \phi_1 \longmapsto \alpha_1\phi_1 = 0$$

$$g_1 \longmapsto \alpha_1$$

sind $\bar{e}R\bar{e} = S$ und $\bar{f}R\bar{f}$ deriviert äquivalent, das heißt die Wegealgebren zu

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

mit $\rho =< \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_5\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_6\gamma_3\gamma_4 - \gamma_7 >$

und

$$\begin{tikzcd}
& & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] \arrow[d, "\gamma_8"'] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & \bullet & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

mit $\rho' =< \gamma_5\gamma_2\gamma_3, \gamma_6\gamma_3\gamma_4 - \gamma_7, \gamma_2\gamma_8 >$

sind deriviert äquivalent.

2. Möglichkeit

1.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
e \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
e \arrow[ur, "\alpha_1"] & & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1$$
$$e \longmapsto \alpha$$

3. $\alpha = \alpha_1$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & g_{2,2} \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\phi_{1,1}"] & g_{2,1} \arrow[ur, "\phi_{1,2}"] & & \bullet \\
e \arrow[ur, "\alpha_1"] & & & \bullet \arrow[ull, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

$, g_2 = g_{2,2},\ \phi_1 = \phi_{1,1}\phi_{1,2}$

$$\begin{array}{l}
\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\quad\phi_1\quad} Sg_2 \\
\qquad\quad e \longmapsto \alpha \longmapsto \alpha\phi_1 = \gamma_5\gamma_2\gamma_3 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \gamma_1 \longmapsto \gamma_1\phi_1 = 0 \lightning
\end{array}$$

Da dies die einzige Möglichkeit war α zu annullieren, muss schon jetzt der neue Punkt f hinzugefügt werden.

4. $Q' =$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& g_1 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\beta"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
e \arrow[ur, "\alpha"] & f & & \bullet \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

$, \rho' = \rho \cup < \alpha\beta >,\ R = kQ'/\rho'$

$$\begin{array}{l}
\rightsquigarrow\ 0 \longrightarrow Se \xrightarrow{\alpha} Sg_1 \xrightarrow{\quad\beta\quad} Sf \longrightarrow 0 \ \textit{ exakt.} \\
\qquad\quad e \longmapsto \alpha \longmapsto \alpha\beta = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \gamma_1 \longmapsto \gamma_1\beta \\
\qquad\qquad\qquad g_1 \longmapsto \beta
\end{array}$$

5. $0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta} g_1R\bar{f} \xrightarrow{\alpha} eR\bar{f} \longrightarrow 0$ *ist exakt.*

$$\begin{array}{l}
\qquad f \longmapsto \beta \longmapsto \alpha\beta = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \gamma_2 \longmapsto \alpha\gamma_2 \\
\qquad\qquad\qquad g_1 \longmapsto \alpha
\end{array}$$

Also sind $\bar{e}R\bar{e}$ und $\bar{f}R\bar{f}$ deriviert äquivalent, was auch vorhersehbar war, da sich die zugehörigen Köcher nur durch Umdrehen eines endständigen Pfeils unterscheiden.

3. Möglichkeit

1. $$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & e \arrow[ul, "\gamma_6"] \arrow[ur, "\gamma_7"'] &
\end{tikzcd}$$

2. $$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & g_{1,1} \arrow[ur, "\gamma_3"] & & g_{1,2} \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & e \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$ $, g_1 = g_{1,1} + g_{1,2}$

3. *Jetzt muss α so gewählt werden, dass es durch ein ϕ_1 annulliert werden kann. Die einzige Möglichkeit ist, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$ und $\phi_1 = \begin{pmatrix} \gamma_3\gamma_4 \\ g_{1,2} \end{pmatrix}$ zu setzen. Dies bedeutet aber, dass für α_2 kein neuer Pfeil benutzt wird, was der Algorithmus jedoch verlangt. Daher kann α nicht annulliert werden, es muss also f direkt hinzugefügt werden.*

4. $Q' =$ $$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & g_{1,1} \arrow[ur, "\gamma_3"] \arrow[ddr, "\beta_1"'] & & g_{1,2} \arrow[ddl, "\beta_2"] \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & e \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \\
& & & f &
\end{tikzcd}$$ $, \rho' = \rho \cup < \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 >$

Würde man die Wege $\alpha_i\beta_i$ rausteilen, dann wäre der Kern von β zu groß. Nur α_1 und α_2 zusammen dürfen annulliert werden, das heißt das neue Viereck muss kommutieren.

$$\rightsquigarrow\ \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Se \arrow[r, "\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}"] & Sg_{1,1} \oplus Sg_{1,2} \arrow[r, "\beta=(\beta_1,-\beta_2)"] & Sf \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$e \longmapsto \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1\beta_1$$

$$\begin{pmatrix}0\\ \alpha_2\end{pmatrix} \longmapsto -\alpha_2\beta_2$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_2\\ 0\end{pmatrix} \longmapsto \gamma_2\beta_1$$

$$\begin{pmatrix}0\\ \gamma_4\end{pmatrix} \longmapsto -\gamma_4\beta_2$$

$$\begin{pmatrix}g_{1,1}\\ 0\end{pmatrix} \longmapsto \beta_1$$

$$\begin{pmatrix}0\\ g_{1,2}\end{pmatrix} \longmapsto -\beta_2$$

5. *Für $R = kQ'/\rho'$ gilt:*

$$0 \longrightarrow fR\bar{f} \xrightarrow{\beta} g_{1,1}R\bar{f} \oplus g_{1,2}R\bar{f} \xrightarrow{\alpha} eR\bar{f} \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
f & \longmapsto & \beta & \longmapsto & \alpha\beta = 0 \\
 & & \begin{pmatrix}\gamma_3\\0\end{pmatrix} & \longmapsto & \alpha_1\gamma_3 \\
 & & \begin{pmatrix}\beta_1\\0\end{pmatrix} & \longmapsto & \alpha_1\beta_1 \\
 & & \begin{pmatrix}0\\\beta_2\end{pmatrix} & \longmapsto & \alpha_2\beta_2 \\
 & & \begin{pmatrix}g_{1,1}\\0\end{pmatrix} & \longmapsto & \alpha_1 \\
 & & \begin{pmatrix}0\\g_{1,2}\end{pmatrix} & \longmapsto & \alpha_2
\end{array}$$

ist exakt, also sind die Wegealgebren kQ_1/ρ_1 und kQ_2/ρ_2 der Köcher

$$Q_1 = \begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] & & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet \arrow[ul, "\alpha_1"'] \arrow[ur, "\alpha_2"] &
\end{tikzcd}$$

mit $\rho_1 =< \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_5\gamma_2\gamma_3,\ \alpha_1\gamma_3\gamma_4 - \alpha_2 >$ und

$$Q_2 = \begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & \bullet \arrow[dr, "\gamma_4"] & \\
& \bullet \arrow[r, "\gamma_2"] & \bullet \arrow[ur, "\gamma_3"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & \bullet \arrow[dl, "\beta_2"] \\
\bullet \arrow[ur, "\gamma_5"] & & & \bullet &
\end{tikzcd}$$

mit $\rho_2 =< \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_5\gamma_2\gamma_3,\ \beta_1 - \gamma_3\gamma_4\beta_2 >$ deriviert äquivalent. Die Relation $\beta_1 - \gamma_3\gamma_4\beta_2$ ergibt sich aus den Relationen $\alpha_1\gamma_3\gamma_4 - \alpha_2$ und $\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$: $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\gamma_3\gamma_4\beta_2$ muss für jede Abbildung, die man α_1 zuordnen kann, gelten, also insbesondere für $\alpha_1 = id$. Damit folgt $\beta_2 = \gamma_3\gamma_4\beta_1$.

5 Ein-Punkt-Erweiterungen

Als letzte Anwendung möchte ich gerne noch die Ein-Punkt-Erweiterungen anführen. Dies sind bestimmte Matrizenringe, die ihren Ursprung in der Erweiterung eines Köchers um einen Punkt haben. Die folgende Definition ist aus [2], Seite 71.

Definition 31. *Sei T ein Schiefkörper, U ein Ring und ${}_UM_T$ ein U-T-Bimodul. Dann nennt man den Dreiecksmatrizenring $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$* ***Ein-Punkt-Erweiterung*** *von U durch ${}_UM_T$.*

Ein-Punkt-Erweiterungen haben zweifache Verbindung zu diesem Thema:
Zum Einen ist der Endomorphismenring $End_\Lambda(M \oplus N)$ isomorph zum Dreiecksmatrizenring $\begin{pmatrix} End_\Lambda(M) & 0 \\ Hom_\Lambda(M,N) & End_\Lambda(N) \end{pmatrix}$, falls $Hom_\Lambda(N,M) = 0$ und M einfach.
Zum Anderen ist eine Wegealgebra $\Lambda = kQ/\rho$ mit i Senke in Q und $e_i \in \Lambda$ dem entsprechenden Idempotent isomorph zu $\begin{pmatrix} k & 0 \\ (1-e_i)\Lambda e_i & (1-e_i)\Lambda(1-e_i) \end{pmatrix}$, da in i kein nicht-trivialer Weg startet und damit $e_i\Lambda e_i \simeq k$ und $e_i\Lambda(1-e_i) = 0$ gilt. Λ ist also eine Ein-Punkt-Erweiterung der Algebra $(1-e_i)\Lambda(1-e_i)$ durch den Bimodul $(1-e_i)\Lambda e_i$. Anschaulich bedeutet dies: Λ entsteht aus einem Köcher Q' mit $Q'_0 = Q_0 \setminus i$ und Relationen $\rho' = \rho \setminus \rho''$, wobei ρ'' die in i endenden Relationen von ρ seien. Andersherum erhält man eine Ein-Punkt-Erweiterung Λ von $\Lambda' = kQ'/\rho'$ durch Hinzufügen der Senke i zu Q'_0 und Relationen ρ'' zu ρ'.
Dies passiert in dem Algorithmus und den Beispielen aus Kapitel 4.2. Betrachtet man Ein-Punkt-Erweiterungen im Allgemeinen, so lassen sich ringtheoretische Beispiele, die nicht aus der Köchertheorie stammen müssen, konstruieren.

6 Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war es, die in Kapitel 3.1 zitierten Ergebnisse von Wei Hu und Changchang Xi zu ringtheoretisieren. Dafür habe ich die Objekte X, M und Y der Kategorie mit projektiven Moduln des Endomorphismenrings von $X \oplus M \oplus Y$ verglichen: X, M und Y sind die Bilder der Projektionen auf das jeweilige Objekt. Setzt man $R = End(X \oplus M \oplus Y)$, so hat man die Entsprechungen $X \leftrightarrow Re$, $M \leftrightarrow Rg$, $Y \leftrightarrow Rf$ für paarweise orthogonale Idempotente e, f, g, die den Projektionen entsprechen, mit $1_R = e + g + f$. Die andere Richtung der Äquivalenz ergibt sich, indem man $\mathscr{C} = R - mod$, $X = Re$, $M = Rg$ und $Y = Rf$ setzt.

Ausgehend von den Theoremen aus [5], die hauptsächlich für Artin-Algebren, also Wegealgebren von Köchern mit Relation, interessant sind, habe ich eine Version für beliebige Ringe gefunden, diese jedoch wieder auf Beispiele von Köcheralgebren angewandt. Ein-Punkt-Erweiterungen geben weitere Beispiele.

Die hier formulierte ringtheoretische Version bringt also eine weitere Möglichkeit, derivierte Äquivalenz von Wegealgebren zu berechnen, jedoch auch für beliebige unitäre Ringe mit genügend paarweise orthogonalen Idempotenten bekommt man ein Kriterium, um derivierte Äquivalenz festzustellen. Die Ein-Punkt-Erweiterungen sind eine schöne Überleitung von der einen zur anderen Beispielklasse.

Literatur

[1] ASSEM, I. ; SIMSON, D. ; SKOWROŃSKI, A. : *London Mathematical Society student texts*. Bd. 65: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1:Techniques of representation theory*. Cambridge University Press, 2006

[2] AUSLANDER, M. ; REITEN, I. ; SMALØ, S. : *Cambridge studies in advanced mathematics*. Bd. 36: *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995. – Taschenbuchausgabe von 1997

[3] AUSLANDER, M. ; SMALØ, S. : Preprojective modules over Artin algebras. In: *J.Algebra* 66 (1980)

[4] HAPPEL, D. : Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras. In: *Cambridge University Press, Cambridge* (1988)

[5] HU, W. ; XI, C. : *Almost $\mathscr{D}$-split sequences and derived equivalences*. 2008. – arXiv:0810.4757v1

[6] IYAMA, O. : Auslander correspondance. In: *Advances in Mathematics* 201 (2007), S. 51–82

[7] KELLER, B. : Derived categories and tilting. In: HÜGEL, L. A. (Hrsg.) ; HAPPEL, D. (Hrsg.) ; KRAUSE, H. (Hrsg.): *Handbook of Tilting Theory*, Cambridge University Press, 2007 (London Mathematical Society Lecture Note Series 332), S. 51–54

[8] MACLANE, S. : *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 5: *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag New York Inc., 1971

[9] RICKARD, J. : Morita theory for derived categories. In: *J. London Math. Soc.* 39 (1986)