Steffen König
Apolonia Gottwald

12.12.2019

Aufgabenblatt 9

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
   (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $m(x)$ von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ und den Grad d von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ als Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.
   (b) Stellen Sie die Multiplikations- und Additionstabellen der Basiselemente $1, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{d-1}$ in $\mathbb{Q}[x]/\langle m(x)\rangle$ auf.
   (c) Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus $\mathbb{Q}[x]/\langle m(x)\rangle \to \mathbb{Q}[x]/\langle x^d\rangle$ an. Existiert auch ein Körperisomorphismus?

(2) Bestimmen Sie für jedes der folgenden Elemente $a \in \mathbb{C}$ den Grad d der Körpererweiterung $K(a)$ und das Minimalpolynom von a für $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ und $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, indem Sie die Potenzen $a^2, a^3, \ldots, a^d$ ausrechnen.
   (a) $a = \sqrt{5} + 1$
   (b) $a = \sqrt[4]{5} + 1$
   (c) $a = i\sqrt[3]{3} - 1$

(3) (a) Sei $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom über einem Körper K. Zeigen Sie, dass f maximal n verschiedene Nullstellen hat.
   (b) Geben Sie ein Polynom vom Grad 2 über dem Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ an, das mehr als 2 Nullstellen hat.

(4) Sei p eine Primzahl und $f(x) = x^n + \bar{a}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 x + \bar{a}_0$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$.
   Zeigen Sie, dass dann auch $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist.

(5) Sei $p > 2$ eine Primzahl und $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ein Polynom über $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:
   (a) Jede Nullstelle von f in $\mathbb{C}$ ist eine p-te Einheitswurzel.
   (b) f ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.
   (c) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ist ein reduzibles Polynom in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$.

Bitte wenden

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Es seien p und q Primzahlen.
  (a) Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$.
  (b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$ und $\sqrt[3]{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ist.
  (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt[3]{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\sqrt[3]{q})$ gilt und bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt[3]{q})$.

(2) *(5 Punkte)* Für einen Körper L ist eine Funktion $f : L \to L$ ein Körperautomorphismus, wenn sie ein bijektiver Ringhomomorphismus ist.
  (a) Zeigen Sie, dass für jeden Körperautomorphismus $f : L \to L$ und jedes $0 \neq a \in L$ die Gleichung $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ gilt.
  (b) Sei L ein Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass für jeden Körperautomorphismus $f : L \to L$ und jedes Element $a \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $f(a) = a$ gilt.
  (c) Bestimmen Sie alle Körperautomorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und beweisen Sie Ihr Ergebnis.

zur Diskussion: Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome für $n \geq 2$ reduzibel sind:
(1) $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x$.
(2) $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$.
(3) $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ ist gerade}}} a_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ ist ungerade}}} a_i.$$

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 18.12.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html