Steffen König
Apolonia Gottwald

05.12.2019

Aufgabenblatt 8

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) (a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ paarweise nicht zueinander isomorph sind.
(b) Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung 8, die Elemente a, b, c der Ordnung 2 enthält, sodass $a \neq b$ und $c \notin \langle a, b\rangle$ gilt.
Zeigen Sie, dass $\langle a, b, c\rangle = G$ ist und $g^2 = e$ für alle $g \in G$ gilt.
(c) Sei G eine nicht zyklische, abelsche Gruppe der Ordnung 8, die ein Element a der Ordnung 4 enthält. Zeigen Sie, dass es ein $b \in G \setminus \langle a\rangle$ mit der Ordnung 2 gibt und $\langle a, b\rangle = G$ gilt.
(d) Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 8 zu einer der Gruppen aus Aufgabenteil (a) isomorph ist.

(2) Sei $H_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Diese Menge wird eine Gruppe durch eine Multiplikation, die die üblichen Vorzeichenregeln und zusätzlich

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

erfüllt.
(a) Geben Sie die Multiplikationstabelle für H_8 an.
(b) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Elemente i, j und k.
(c) Für eine Gruppe G kann man die *Kommutatoren* $L_n(G)$ definieren: $L_0(G) = G$ und $L_n(G) = \langle l^{-1}g^{-1}lg \mid l \in L_{n-1}(G), g \in G\rangle$.
Dann ist $L_1(G)$ die gewöhnliche Kommutatorgruppe von G und $L_n(G) < L_{n-1}(G)$. Eine Gruppe heißt *nilpotent*, wenn es ein n mit $L_n(G) = \{e\}$ gibt.
Zeigen Sie, dass H_8 nilpotent ist.

(3) Sei G eine Gruppe der Ordnung 8, die nicht abelsch ist.
(a) Zeigen Sie, dass G ein Element a der Ordnung 4 enthält.
(b) Angenommen, jedes Element $b \in G \setminus \langle a\rangle$ habe die Ordnung 4. Zeigen Sie, dass dann $b^2 = a^2$ gilt, und geben Sie einen Isomorphismus $\phi\colon H_8 \xrightarrow{\sim} G$ an, wobei H_8 wie in der Bearbeitungsaufgabe 2 definiert ist. Beweisen Sie, dass ϕ ein Isomorphismus ist.
(c) Angenommen, es gibt ein Element $b \in G \setminus \langle a\rangle$ mit der Ordnung 2. Zeigen Sie, dass dann $ba \neq a^2b$ und $ba = a^3b$ gilt.
Geben Sie einen Isomorphismus $\psi\colon D_8 \xrightarrow{\sim} G$ an. Beweisen Sie, dass ψ ein Isomorphismus ist.

Bitte wenden

(4) (a) Bestimmen Sie Basen der Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$ über $\mathbb{Q}$.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$ eine Körpererweiterung über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist und bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{7})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
(c) Welche Grade haben die Körpererweiterungen in (a) und (b)?

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* G sei eine Gruppe der Ordnung 45.
(a) Zeigen Sie, dass G eine normale 3-Sylowuntergruppe und eine normale 5-Sylowuntergruppe hat.
(b) Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(2) *(5 Punkte)* Sei K ein Körper und L/K eine Körpererweiterung über K.
(a) Es seien $a, b \in L$ algebraisch abhängige Elemente. Zeigen Sie, dass $K[a,b] = K(a,b)$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass die algebraisch abhängigen Elemente in L einen Unterkörper M von L bilden.
(c) Sei $[L : K] = 2$. Zeigen Sie, dass jedes Element in L algebraisch ist.

zur Diskussion:

(1) Wie viele Gruppen der Ordnung 8 gibt es?
(2) Welchen Grad hat die Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ über $\mathbb{Q}$?
(3) Ist $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$?
(4) Finden Sie ein reelles Polynom f, sodass $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/\langle f(x)\rangle$ ist.
(5) Finden Sie eine Körpererweiterung L von $\mathbb{Q}$, in der alle 3. Einheitswurzeln enthalten sind, also alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 1$. Welchen Grad hat L?

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 11.12.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html