

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

- (1) Bestimmen Sie für die Diedergruppe $G = D_{12} = \langle r, s \mid r^6 = 1 = s^2, srs = r^{-1} \rangle$
 - (a) das Zentrum $Z(G)$,
 - (b) die Zentralisatoren $C_G(s)$, $C_G(r)$ und $C_G(r^2)$,
 - (c) alle p -Sylowuntergruppen $S < G$ für jede Primzahl p , die $\text{ord}(G)$ teilt
 - (d) die Normalisatoren $N_G(S)$ der Sylowuntergruppen $S < G$.
- (2) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_5 genau 10 Untergruppen der Ordnung 3 und 5 Untergruppen der Ordnung 5 hat. Geben Sie alle Untergruppen dieser Ordnungen an.
- (3) Sei G eine Gruppe, $N \triangleleft G$ ein Normalteiler von G , p eine Primzahl, die $\text{ord}(G)$ und $\text{ord}(N)$ teilt und H eine p -Sylowuntergruppe von G . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) $H \cap N$ ist eine p -Sylowuntergruppe von N .
 - (b) HN/N ist eine p -Sylowuntergruppe von G/N .
- (4) Sei p eine Primzahl. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) Seien G_1, G_2 Gruppen, deren Ordnungen von p geteilt werden. Dann sind die p -Sylowuntergruppe von $G_1 \times G_2$ genau die Gruppen der Form $H_1 \times H_2$, wobei H_1 eine p -Sylowuntergruppe von G_1 und H_2 eine p -Sylowuntergruppe von G_2 ist.
 - (b) Es gibt ein $n \geq 2$ und eine Gruppe der Ordnung p^n , die einfach ist.

schriftliche Aufgaben:

- (1) (5 Punkte) Es seien $p < q$ Primzahlen und G eine Gruppe mit der Ordnung $\text{ord}(G) = p^2q^2 \neq 36$. Zeigen Sie, dass G eine normale q -Sylowuntergruppe hat.
- (2) (5 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) Jede Gruppe der Ordnung 105 hat eine normale 5-Sylowuntergruppe oder eine normale 7-Sylowuntergruppe.
 - (b) Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 28.

zur Diskussion:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) Jede Gruppe der Ordnung 51 ist abelsch.
- (2) Jede Gruppe der Ordnung 12 hat eine normale 2-Sylowuntergruppe oder eine normale 3-Sylowuntergruppe.
- (3) Jede Gruppe der Ordnung 35 ist zyklisch.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 04.12.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzschrift finden Sie auf der Webseite

<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html>