Steffen König
Apolonia Gottwald

21.11.2019

Aufgabenblatt 6

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen $f : G \times M \to M$ Operationen der Gruppe G auf der Menge M sind. Bestimmen Sie für jedes $m \in M$ die Bahn Gm und den Stabilisator G_m.
  (a) $G := S_n$, $M := \{1, \ldots, n\}$, $f((\phi, i)) = \phi(i)$.
  (b) $G := S_n$, $M := \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots n\}\}$, $f((\phi, (i, j))) = (\phi(i), \phi(j))$.
  (c) $M := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$,
  $G := SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \dim(A) = 1\}$,
  $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.

(2) Es sei G eine Gruppe mit einer Operation ϕ auf einer Menge M.
  (a) Zeigen Sie, dass die Operation von G auf M genau dann treu ist, wenn für den Durchschnitt der Stabilisatoren $\bigcap_{m \in M} G_m = \{e\}$ gilt.
  (b) Es sei G endlich und abelsch. Zeigen Sie, dass $|G| = |M|$ gilt, falls ϕ treu und transitiv ist.

(3) Sei p eine Primzahl und $G \neq \{e\}$ eine p-Gruppe.
  (a) Zeigen Sie, dass das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial ist, also $Z(G) \neq \{e\}$ gilt.
  (b) Sei G nicht abelsch und $|G| = p^3$. Zeigen Sie, dass das Zentrum die Ordnung $|Z(G)| = p$ hat.

(4) Aus 16 roten und grünen Quadraten wird eine 4×4-Platte zusammengesetzt. Dabei ist die Vorder- und Rückseite der Quadrate gleich gefärbt und nicht unterscheidbar.
  (a) Welche Möglichkeiten gibt es, eine Platte im Raum zu drehen, um eine neue Platte zu erhalten? Durch welche Gruppe G werden diese Drehungen beschrieben? Auf welcher Menge X operiert G?
  (b) Überlegen Sie für jedes $g \in G$, welche Platten durch g nicht verändert werden. Bestimmen Sie $|X^g|$.
  (c) Wie viele verschieden gefärbte Platten gibt es? Dabei gelten zwei Platten als gleich gefärbt, wenn man eine der beiden Platten durch eine Drehung der anderen Platte erhalten kann.

Bitte wenden

schriftliche Aufgaben:

(1) *(4 Punkte)*
 (a) Sei G eine Gruppe mit 77 Elementen und M eine Menge mit 31 Elementen. Zeigen Sie, dass jede Operation von G auf M einen Fixpunkt hat.
 (b) Es seien p und q Primzahlen mit $p \neq q$. Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

(2) *(6 Punkte)* Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein Sechseck einzufärben, indem man jede Ecke mit einem schwarzen oder weißen Punkt versieht? Beweisen Sie Ihre Antwort mithilfe von Burnsides Zähllemma.

Dabei gelten zwei Färbungen als gleich, wenn man sie durch Drehungen oder Spiegelungen ineinander überführen kann. Die Punkte sollen sich nur in der Farbe unterscheiden.

zur Diskussion:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Es gibt eine einfache Gruppe der Ordnung 14.
(2) Es gibt zwei Gruppen der Ordnung 17, die nicht isomorph zu einander sind.
(3) Es gibt eine Gruppe der Ordnung 25, die transitiv auf einer Menge der Ordnung 12 operiert.
(4) Es gibt eine Gruppe der Ordnung 24, die transitiv auf einer Menge der Ordnung 12 operiert.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 27.11.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html