Steffen König
Apolonia Gottwald

14.11.2019

Aufgabenblatt 5

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Für einen Ring R wird mit R^* die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente in R bezeichnet.
  (a) Welche Ordnungen haben $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^*$ und $(\mathbb{Z}/53\mathbb{Z})^*$? Geben Sie für jede der Gruppen alle Elemente an, die in ihr enthalten sind.
  (b) Es seien p und $q \neq p$ Primzahlen. Welche Ordnungen haben $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ und $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})^*$? Geben Sie alle Elemente an, die in ihnen enthalten sind.
  (c) Welche Ordnungen haben die Elemente in $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$? Welche Untergruppen hat $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$?
  (d) Welche Ordnung hat $H := \langle \bar{7} \rangle \subset (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^* =: G$? Welche Nebenklassen gH hat H? Geben Sie die Multiplikationstabelle von G/H an. Ist diese Gruppe zyklisch?

(2) Sei G eine Gruppe mit einem Normalteiler N und einer beliebigen Untergruppe H. Dann ist HN eine Untergruppe von G.
  (a) Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler von HN und $H \cap N$ ein Normalteiler von H ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $H/(H \cap N) \cong HN/N$ gilt.
  (c) Es seien N und G/N abelsch. Beweisen Sie, dass es einen abelschen Normalteiler N' von H gibt, sodass H/N' abelsch ist.

(3) Es seien a und b natürliche Zahlen mit $g = ggT(a,b)$ und $k = kgV(a,b)$.
  (a) Zeigen Sie, dass $g\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong a\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ gilt.
  (b) Welche Ordnungen haben diese Gruppen? Folgern Sie, dass die Gleichung $ab = gk$ gilt.

(4) Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $Z(G) := \{h \in G \mid hg = gh \text{ für alle } g \in G\}$ und $K(G) := \{hgh^{-1}g^{-1} \mid h, g \in G\}$.
  (a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ und $K(G)$ Normalteiler sind.
  (b) Berechnen Sie $Z(G)$, $K(G)$, $G/Z(G)$ und $G/K(G)$ für $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $G = \Sigma_3$.
  (c) Zeigen Sie, dass $G/Z(G)$ nicht zyklisch ist, falls $Z(G)$ eine echte Untergruppe von G ist.
  (d) Sei N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass G/N genau dann abelsch ist, wenn $K(G) < N$ gilt.

Bitte wenden

schriftliche Aufgaben:

(1) *(7 Punkte)* Sei $D_{12} = \langle r, s \mid r^6 = 1 = s^2, srs = r^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 12. Zeigen Sie, dass die folgenden Untergruppen N von D_{12} Normalteiler sind, und bestimmen Sie alle Nebenklassen. Beweisen oder widerlegen Sie für jedes N, dass D_{12}/N abelsch ist.
   (a) $N = \langle r \rangle$
   (b) $N = \langle r^3 \rangle$
   (c) $N = \langle r^2, s \rangle$

(2) *(3 Punkte)* Betrachten Sie $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als additive Gruppen. Zeigen Sie, dass alle Elemente in der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung haben. Ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eine endliche Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

zur Diskussion:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Zu jedem Normalteiler N einer Gruppe G gibt es eine Gruppe H und einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to H$, sodass $N = Kern(\phi)$ gilt.
(2) Es gibt eine Gruppe $G \ncong \{e\}$ und einen Normalteiler N, sodass $G/N \cong N$ ist.
(3) Seien G und H Gruppen mit Normalteilern $M \lhd G$ und $N \lhd H$. Dann ist $M \times N$ ein Normalteiler von $G \times H$.
(4) Die Diedergruppe D_{24} ist isomorph zu Σ_4.
(5) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein m, sodass $ord((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*) = n$ gilt.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 20.11.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html