Steffen König
Apolonia Gottwald

07.11.2019

Aufgabenblatt 4

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Schreiben Sie die Permutationen $\sigma_1, \ldots, \sigma_4 \in \Sigma_{10}$, die von der folgenden Tabelle beschrieben werden, als Produkte disjunkter Zyklen.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_1(x)$	2	3	4	1	5	10	9	8	7	6
$\sigma_2(x)$	4	3	2	1	8	10	9	5	7	6
$\sigma_3(x)$	1	2	3	4	6	7	8	9	10	5
$\sigma_4(x)$	3	2	5	4	6	7	8	9	10	1

Berechnen Sie die Potenzen σ_3^3, σ_3^{-1}, σ_4^3, σ_4^4, σ_4^{-1}. Welche Ordnungen haben σ_3, σ_4 und die von Ihnen berechneten Potenzen?

(2) Vier Abenteurer haben sich in einem Labyrinth verlaufen. Schließlich kommen sie an eine Tür, die nach draußen führt, die sie aber nur öffnen können, wenn sie vorher eine Aufgabe lösen: Jeder Abenteurer bekommt eine Nummer von 1 bis 4 zugeteilt und muss alleine einen Raum mit vier Fächern betreten, die von außen durchnummeriert sind und in denen jeweils eine der Zahlen 1 bis 4 steht (im Allgemeinen nicht die gleiche wie die Zahl, die außen steht).

Er oder sie darf nur zwei der Fächer öffnen, nichts an dem Raum verändern und keine Informationen an die anderen Abenteurer weitergeben.

Nur wenn alle das Fach öffnen, in dem sich ihre Nummer befindet, dürfen sie das Labyrinth verlassen.

Wenn jede der vier Personen die Fächer zufällig öffnet, ist für jede die Wahrscheinlichkeit, die richtige Zahl zu finden, $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle das richtige Fach finden, ist also nur $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Lässt sich dies verbessern?

(a) Wie viele Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt es? Wie viele davon enthalten einen 4-Zykel oder einen 3-Zykel?

(b) Finden Sie eine Strategie, bei der die Abenteurer das Labyrinth mit einer Wahrscheinlichkeit von über einem Drittel verlassen können.

(3) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $g \in G$ ein Element mit $g^2 \in H$. Dann ist gH eine Untergruppe von G.

(b) Es seien $g \in G$ und $h \in H$ mit $g^{-1}h \in H$. Dann ist $gH = H$.

(c) Wenn die Ordnung von G eine Primzahl ist, dann ist jede Untergruppe von G ein Normalteiler.

(d) Wenn $H \neq G$ ein Normalteiler ist, dann ist H kommutativ.

(e) Wenn $H \neq \{1\}$ ein Normalteiler ist, dann ist G/H kommutativ.

Bitte wenden

(4) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Wenn N ein Normalteiler von G ist, dann ist $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$ eine Untergruppe von G.
   (b) Wenn N ein Normalteiler von G ist, dann ist HN ein Normalteiler von G.
   (c) Wenn H und $N \subset H$ Normalteiler von G sind, dann ist N ein Normalteiler von H und H/N ist ein Normalteiler von G/N.

(5) Zeigen Sie, dass die folgenden Untergruppen Normalteiler sind, und bestimmen Sie alle Nebenklassen.
   (a) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \subset GL(n, \mathbb{R})$, wobei $GL(n, \mathbb{R})$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen ist.
   Zeigen Sie, dass $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$ ist, wobei $\mathbb{R}^*$ die multiplikative Gruppe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezeichnet.
   (b) $V_4 = \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle \subset \Sigma_4$. Zeigen Sie, dass $\Sigma_4/V_4 \cong \Sigma_3$ ist.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(6 Punkte)* Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:
   (a) Wenn für alle $g \in G$ die Gleichung $g^2 = 1$ gilt, dann ist G kommutativ.
   (b) Wenn G kommutativ ist und $4 \nmid ord(G)$, dann gibt es höchstens ein Element $g \neq 1$ für das $g^2 = 1$ gilt.
   (c) Wenn G die Ordnung 6 hat, dann gibt es eine Untergruppe N von G mit der Ordnung 3. Diese ist ein Normalteiler von G.

(2) *(4 Punkte)*
   (a) Sei G eine Gruppe mit einem Normalteiler $N \lhd G$, sodass $[G : N] = 2$. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ mit ungerader Ordnung $g \in N$ gilt.
   (b) Sei $A_4 \subset \Sigma_4$ die alternierende Gruppe mit der Definition aus der Bearbeitungsaufgabe 3 von Blatt 3. Es gilt $ord(A_4) = 12$.
   Zeigen Sie, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 hat.

zur Diskussion:

Welche der folgenden Untergruppen sind normal?
(1) $\langle (1,2) \rangle \subset \Sigma_3$.
(2) $A_n \subset \Sigma_n$ mit der Definition aus der Bearbeitungsaufgabe 3 von Blatt 3.
(3) $H = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid Spur(A) = 0\} \subset Mat(n \times n, \mathbb{R})$, wobei $Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ für $A = (a_{ij})_{nn}$ ist.
(4) $T_n = \{A = (a_{ij})_{nn} \in GL(n \times n, \mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \subset GL(n \times n, \mathbb{C})$, die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen.

Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. Ist $N \cap H$ ein Normalteiler von H? Ist $N \cap H$ ein Normalteiler von G?

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 13.11.2019.

Alle Aufgabenblätter finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html