Steffen König
Apolonia Gottwald

31.10.2019

Aufgabenblatt 3

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass für $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$(x + yi) \mid (a + bi) \text{ in } \mathbb{Z}[i]$$

auch

$$\lambda(x + yi) \mid \lambda(a + bi) \text{ in } \mathbb{Z}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$

$$(x + yi) \mid (a + bi) \text{ in } \mathbb{Z}[i]$$

genau dann gilt, wenn

$$(x^2 + y^2) \mid (ax + by) \quad \text{und} \quad (x^2 + y^2) \mid (bx - ay) \quad \text{in } \mathbb{Z}$$

gilt.

(c) Sei p eine Primzahl in $\mathbb{Z}$, für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p = 4k + 3$ ist. Zeigen Sie, dass p ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$ ist.

(2) (a) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein faktorieller Ring?

(b) Sei K ein Körper. Ist $K[x^2, x^3]$, der Ring der Polynome der Form

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^{2i+3j}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in K$, ein faktorieller Ring?

(3) (a) Seien G und H Gruppen. Zeigen Sie, dass für jeden Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$, der Kern von f eine Untergruppe von G ist.

(b) Eine Permutation $\sigma : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\} \in \Sigma_n$ heißt *gerade*, wenn die Anzahl der Tupel (i, j) mit $1 \le i < j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gerade ist. Andernfalls heißt sie *ungerade*.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$sgn : S_n \to \{-1, 1\},\ sgn(\sigma) = \begin{cases} 1 & \mid \sigma \text{ ist gerade} \\ -1 & \mid \sigma \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Jede Permutation in Kern A_n der Funktion sgn ist ein Produkt von 3-Zyklen in S_n, das heißt, von Permutationen, die als Produkt $\tau_{ij} \circ \tau_{jk}$ mit $1 \le i, j, k \le n$ darstellbar sind. Dabei ist τ_{ij} die Transposition, die i und j vertauscht und τ_{jk} die Transposition, die j und k vertauscht.

Bitte wenden

(4) Welche Untergruppen haben die folgenden Gruppen?
  (a) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
  (b) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
  (c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
  (d) Σ_4.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass eine Untermenge U einer multiplikativen Gruppe G genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
  (a) $U \neq \emptyset$
  (b) Ist $u \in U$, so ist auch $u^{-1} \in U$.
  (c) Sind $u, v \in U$, so ist auch $u \cdot v \in U$.

(2) *(7 Punkte)* Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
  (a) Sei G eine Gruppe und $\{H_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Untergruppen von G. Dann ist $\bigcap_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G.
  (b) Sei G eine zyklische Gruppe und H_1, H_2 Untergruppen von G, deren Ordnungen Primzahlen sind. Dann ist $H_1 \cap H_2 = 1$, $H_1 \subset H_2$ oder $H_2 \subset H_1$.
  (c) Sei G eine Gruppe, sodass $f : G \to G, f(g) = g^2$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Dann ist G abelsch.

zur Diskussion:

Sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Untermenge von G. Dann ist

$$< g \mid g \in M >= \left\{ \prod_{i=1}^{n} g_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall\ 1 \leq i \leq n : g_i \in M \text{ oder } g_i^{-1} \in M \right\}$$

die kleinste Untergruppe von G, die M enthält.
Sei $GL_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und

$$D_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset GL_2(\mathbb{R}).$$

Zu welchen der folgenden Gruppen ist D_4 isomorph? Geben Sie einen Isomorphismus an oder beweisen Sie, dass kein Isomorphismus existiert.

(1) $< \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right) >\subset \Sigma_4$.
(2) $< \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right) >\subset \Sigma_4$.
(3) A_4 mit der Definition aus der dritten Votieraufgabe.
(4) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
(5) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 06.11.2019.

Alle Aufgabenblätter finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html