Steffen König
Apolonia Gottwald

24.10.2019

Aufgabenblatt 2

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) (a) Geben Sie die Additions- und Multiplikationstabellen von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ an.
(b) Sei $I =< 36 > + < 78 > + < 99 > \subset \mathbb{Z}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$. Berechnen Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass $I =< a >$ ist.
(c) Sei R ein Ring mit Idealen $I, J \subset R$. Ist $I \cup J$ ein Ideal in R? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
(d) Zeigen Sie, dass das Zentrum eines Rings R ein kommutativer Teilring ist, das heißt, dass es mit der Addition, Multiplikation und dem Einselement aus R einen kommutativen Ring bildet.

(2) Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen.
(a) Welche Einheiten hat $\mathbb{Z}[i]$?
(b) Ist 5 ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$?
(c) Ist $1 + i$ ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$?

(3) Betrachten Sie den Ring der reellen trigonometrischen Polynome, das heißt, die Menge reeller Funktionen

$$T = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \le k \le n \right\}$$

mit der Addition

$$f + g = (f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

und der Multiplikation

$$f \cdot g = (f \cdot g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Der Ring $(T, +, \cdot)$ ist ein Integritätsbereich. Analog zu Polynomen ist der *Grad* von f das maximale $n \in \mathbb{N}$ für das $a_n \neq 0$ oder $b_n \neq 0$ gilt. Wenn f den Grad n hat und g den Grad m, dann hat das Produkt fg den Grad $n + m$.
(a) Welche Einheiten besitzt T?
(b) Zeigen Sie, dass alle $f \in T$, die den Grad 1 haben, unzerlegbar sind.
(c) Schreiben Sie die reellen Funktionen f und g, die durch die Gleichungen $f(x) = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$ und $g(x) = \sin^2 x$ defniert werden, als Elemente von T.
(d) Ist T ein euklidischer Ring?

Bitte wenden

(4) Seien $a, b, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen, sodass $am_1 + bm_2 = 1$ gilt.
  (a) Zeigen Sie, dass für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ und $x = r_1am_1 + r_2bm_2$

$$x \in r_2 + < m_1 > \text{ und } x \in r_1 + < m_2 >$$

  gilt.
  (b) Für ganze Zahlen x, a, r mit $x \in r+ < a >$ schreiben wir $x \equiv r \mod a$. Berechnen Sie eine ganze Zahl x, sodass das Folgende gilt:

$$x \equiv 3 \mod 15 \quad \text{und} \quad x \equiv 2 \mod 47.$$

schriftliche Aufgaben:

(1) *(6 Punkte)* Übertragen sich die folgenden Eigenschaften eines Rings R auf seine Teilringe (also Teilmengen, die mit der Addition, Multiplikation und dem Einselement aus R einen Ring bilden) und Quotientenringe (also Ringe der Form R/I für ein Ideal $I \trianglelefteq R$)? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
  (a) Kommutativität.
  (b) Nullteilerfreiheit.
  (c) Jedes Ideal in R ist ein Hauptideal.

(2) *(4 Punkte)* Sei R ein kommutativer Ring und I, J Ideale in R, für die $I + J = R$ gilt.
  Zeigen Sie, dass für das Ideal

$$I \cdot J := \left\{ \sum_{k=1}^{n} r_k s_k \mid n \in \mathbb{N}, r_k \in I, s_k \in J \text{ für } 1 \le k \le n \right\}$$

die Gleichung $I \cdot J = I \cap J$ gilt.

zur Diskussion:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Das Urbild eines Primideals unter einem surjektiven Ringhomomorphismus ist ein Primideal.
(2) Wenn der Ring R nur endlich viele Elemente hat und ein Element a weder Links- noch Rechtsnullteiler ist, dann ist a eine Einheit.
(3) Sei R ein kommutativer Ring und

$$N := \{r \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n = 0\}$$

  die Menge der nilpotenten Elemente in R. Dann ist N ein Ideal in R.
(4) Sei K ein Körper. Die Menge D_n der n-dimensionalen Diagonalmatrizen bildet ein Ideal in $Mat(n \times n, K)$.
(5) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 30.10.2019.

Alle Aufgabenblätter finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html