Steffen König
Apolonia Gottwald

30.01.2020

Aufgabenblatt 14

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Bestimmen Sie den Grad der folgenden Körpererweiterungen $L/\mathbb{Q}$ und überprüfen Sie, ob $L/\mathbb{Q}$ normal ist.
Finden Sie für jedes L eine normale Körpererweiterung $M/\mathbb{Q}$ mit möglichst kleinem Grad, sodass $L \subset M$ gilt und bestimmen Sie den Grad von M.
  (a) $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
  (b) $L := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}e^{\pi i/3})$.
  (c) $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3}\sqrt[3]{2})$.

(2) Betrachten Sie die Körpererweiterung $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{3})$ über $\mathbb{Q}$.
  (a) Bestimmen Sie alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen $L \to \overline{\mathbb{Q}}$.
  (b) Ist $L/\mathbb{Q}$ separabel? Welchen Separabilitätsgrad hat L?
  (c) Ist $L/\mathbb{Q}$ einfach? Falls ja, finden Sie ein $a \in L$, sodass $L = \mathbb{Q}(a)$ gilt.

(3) Sei K ein Körper mit $char(K) = p > 0$ und L/K eine Körpererweiterung. Sei $a \in L \setminus K$ ein Element, für das es ein $e \in \mathbb{N}$ mit $a^{(p^e)} \in K$ gibt.
  (a) Beweisen Sie, dass das Minimalpolynom von a gerade $f(x) = x^{(p^e)} - a^{(p^e)}$ ist, wobei $e \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl ist, für die $a^{(p^e)} \in K$ gilt.
  (b) Zeigen Sie, dass $K(a)$ nicht separabel ist.

(4) Seien p eine Primzahl und d, n positive ganze Zahlen mit $d \mid n$.
  (a) Zeigen Sie, dass $(p^d - 1) \mid (p^n - 1)$ in $\mathbb{Z}$ gilt.
  (b) Sei F ein endlicher Körper mit $|F| = p^n$. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x) = x^{(p^d)} - x$ über F in Linearfaktoren zerfällt und dass F einen Teilkörper mit p^d Elementen enthält.

zur Diskussion:

(1) Ist $K := \mathbb{F}_2/\langle x^2 + x + 1\rangle$ eine separable Körpererweiterung über $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Bestimmen Sie alle $\mathbb{F}_2$-Homomorphismen $K \to \overline{\mathbb{F}}_2$.
(2) Konstruieren Sie einen Körper mit 27 Elementen.
(3) Bestimmen Sie alle $\mathbb{R}$-Automorphismen von $\mathbb{C}$.

Die Besprechung erfolgt in den Übungsgruppen am Mittwoch, 05.02.2020.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html