Steffen König
Apolonia Gottwald

23.01.2020

Aufgabenblatt 13

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Sei R ein kommutativer Ring und $I \lhd R$ ein Ideal. Dann ist

$$I[x] := \{a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 \mid a_i \in I \text{ für } 0 \leq i \leq n\} \subset R[x]$$

die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in I. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $I[x]$ ist ein Ideal in $R[x]$.
   (b) Es ist $R[x]/I[x] \cong (R/I)[x]$.

(2) Sei G eine Gruppe, und seien H und K Untergruppen von G. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Wenn $G = H \cup K$ ist, dann gilt $G = H$ oder $G = K$.
   (b) Wenn es ein $g \in G$ gibt mit $H = gKg^{-1}$, dann ist $G = HK$ genau dann, wenn $G = H$ gilt.

(3) Sei G eine Gruppe mit endlicher Ordnung, p eine Primzahl mit $p \mid ord(G)$, P eine p-Sylowuntergruppe von G. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Sei N ein Normalteiler von G. Wenn $P \subset N$ ist, dann ist jede p-Sylowuntergruppe von G eine Untergruppe von N.
   (b) Sei N die kleinste Untergruppe von G, die alle p-Sylowuntergruppen von G enthält. Dann ist N ein Normalteiler.
   (c) Sei N wie in (b) definiert und $f : G \to G$ ein Isomorphismus. Dann ist $f(N) = N$.

(4) Betrachten Sie die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$.
   (a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
   (b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $m_a(x)$ von $a = 2 + \sqrt[3]{2}$.
   (c) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von $m_a(x)$ über $\mathbb{Q}$.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(4 Punkte)* Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Wenn R nur endlich viele Elemente enthält, dann ist R ein Körper.
   (b) Für jedes Ideal $I \lhd R$ ist auch R/I ein Integritätsbereich.

(2) *(6 Punkte)* Für die folgenden Gruppen G und Untergruppen H operiert H auf G durch Konjugation. Bestimmen Sie die Bahnen unter dieser Operation.
   (a) $G := \Sigma_3$, $H = \langle(1, 2, 3)\rangle$.
   (b) $G := \Sigma_4$, $H = \langle(1, 2, 3)\rangle$.

Bitte wenden

zur Diskussion:

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Es sei G eine Gruppe, p eine Primzahl, $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p und $ord(G) = pm$. Dann hat G eine normale p-Sylowuntergruppe.

(2) Sei G eine Gruppe, p eine Primzahl mit $p \mid ord(G)$ und n_p die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von G. Dann ist $n_p \neq 2$.

(3) $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit der Addition $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ und der Multiplikation $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$ ist ein Körper.

(4) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ ist ein Körper und es existiert ein Körperisomorphismus $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 1\rangle \to K$, wobei K wie in (3) definiert ist.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 29.01.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html