Steffen König
Apolonia Gottwald

16.01.2020

Aufgabenblatt 12

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Beweisen Sie, dass die folgenden Polynome f über dem angegebenen Körper K irreduzibel sind und konstruieren Sie jeweils eine Körpererweiterung L, in der f eine Nullstelle hat.
Zerfällt f über L in Linearfaktoren?
  (a) $f(x) = x^2 + x + 1$ über $K := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
  (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ über $K := \mathbb{Q}$.
  (c) $f(x) = x^3 - 12x + 8$ über $K := \mathbb{Q}$.

(2) Sei $\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $f(x) = x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$.
  (a) Zeigen Sie, dass f unzerlegbar ist.
  (b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L von f.
  (c) Geben Sie eine Basis von L als Vektorraum über $\mathbb{F}_3$ an. Wieviele Elemente hat L?
  (d) Sei $L^\times$ die Gruppe der Einheiten von L. Welche Ordnung hat $L^\times$? Zeigen Sie, dass $L^\times$ zyklisch ist.

(3) Betrachten Sie die Polynom $f(x) = x^4 + 2$ und $g(x) = x^2 + 2$ in $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
  (a) Zeigen Sie, dass f und g irreduzibel über $\mathbb{F}_5$ sind.
  (b) Konstruieren Sie eine Körpererweiterung $L/\mathbb{F}_5$ vom Grad 4, in der f eine Nullstelle hat.
  (c) Geben Sie eine Basis von L als Vektorraum über $\mathbb{F}_5$ an. Wieviele Elemente hat L?
  (d) Zerfällt f über L in Linearfaktoren?
  (e) Zerfällt g über L in Linearfaktoren?

(4) Betrachten Sie die beiden Polynome $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ und $g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 4$ in $\mathbb{Q}[x]$ aus der zweiten Bearbeitungsaufgabe auf Blatt 11.
  (a) Bestimmen Sie die Zerfällungskörper dieser beiden Polynome und geben Sie jeweils eine Basis des Zerfällungskörpers als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ an.
  (b) Sind die Zerfällungskörper von f und g isomorph? Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus an.
  (c) Welche Zerfällungskörper haben f und g, wenn sie als Polynome über $\mathbb{R}$ betrachtet werden?

Bitte wenden

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für Körper $K \subset M \subset L$:
  (a) Wenn M/K und L/M normal sind, so ist auch L/K normal.
  (b) Wenn L/K normal ist, so ist auch M/K normal.
  (c) Wenn L/K normal ist, so ist auch L/M normal.

(2) *(5 Punkte)* Berechnen Sie die Zerfällungskörper L der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ und geben Sie jeweils eine Basis von L als Vektorraum an.
  (a) $x^3 + 3$.
  (b) $x^4 - 2$.

zur Diskussion:

(1) Gibt es zu jedem Körper eine Körpererweiterung vom Grad 5?
(2) Ist $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ eine algebraische Körpererweiterung?
(3) Ist jede algebraische Körpererweiterung normal?
(4) Ist jede normale Körpererweiterung algebraisch?

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 22.01.2020

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html