Steffen König
Apolonia Gottwald

09.01.2020

Aufgabenblatt 11

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Sei L/K eine Körpererweiterung und $a \in L$ ein Element mit Minimalpolynom $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$.
Bestimmen Sie die Minimalpolynome der Elemente
(a) $-a$,
(b) a^{-1}.

(2) Betrachten Sie die beiden Polynome $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ und $g(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 4$ in $\mathbb{Q}[x]$.
(a) Zerlegen Sie $f(x)$ und $g(x)$ in unzerlegbare Faktoren.
(b) Welche komplexen Nullstellen haben $f(x)$ und $g(x)$? Bestimmen Sie für jede Nullstelle a den Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(a)$.

(3) Zeigen Sie, dass ein endlicher Körper F nicht algebraisch abgeschlossen sein kann.
Hinweis: Finden Sie ein Polynom, das keine Nullstelle in F hat.

(4) Sei $char(K) \neq 2$ (also $1_K + 1_K \neq 0$) und L/K eine Erweiterung vom Grad 2. Zeigen Sie, dass L genau zwei K-Automorphismen hat.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(2 Punkte)* Sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2$ (also $1_K + 1_K \neq 0$) und L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2. Zeigen Sie, dass es dann ein $a \in L \setminus K$ mit $a^2 \notin K$ gibt.

(2) *(8 Punkte)* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $S := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:
(a) $[\mathbb{Q}(S) : \mathbb{Q}]$ ist unendlich.
(b) Es ist $\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_j)$.
(c) $\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q}$ ist eine algebraische Körpererweiterung.
Ist $\mathbb{Q}(S)$ algebraisch abgeschlossen?

zur Diskussion:

(1) Ist $x^4 + 54x^3 + 12x^2 + 72x + 24 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel?
(2) Gibt es einen Körper mit 125 Elementen?
(3) Gibt es einen Körper mit 36 Elementen?

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 15.01.2019.

Alle Aufgabenblätter und ein Kurzskript finden Sie auf der Webseite

https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html