

## Übungen zur Vorlesung Algebra

### zu bearbeiten:

- (1) Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung und  $a, b \in L$  mit  $m_a(x) = m_b(x)$ .
  - (a) Gilt dann  $K(a) \simeq K(b)$ ?
  - (b) Gilt  $K(a) = K(b)$ ?
- (2) Sind die folgenden Polynome primitiv als Polynome über  $\mathbb{Z}$ ? Über  $\mathbb{Q}$ ?
  - (a)  $21x^3 + 231x^2 + 112x + 45$ .
  - (b)  $36x^2 + 204x + 63$ .
- (3) Sei  $f(x) = x^6 + x + 1$  ein Polynom über  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
  - (a) Ist  $f$  irreduzibel?
  - (b) Sei  $g(x) = x^6 + x + 1$  ein Polynom über  $\mathbb{Z}$ . Ist  $g$  irreduzibel?
- (4) Ein Körper  $L$  heißt *quadratisch abgeschlossen*, wenn jede quadratische Gleichung mit Koeffizienten in  $L$  eine Lösung in  $L$  hat.  
Sei  $K$  ein Körper und  $\bar{K}$  ein algebraischer Abschluss von  $K$ .  
Zeigen Sie: es gibt einen eindeutig bestimmten quadratisch abgeschlossenen Körper  $K \subset K^{(2)} \subset \bar{K}$ , so, dass jeder andere quadratisch abgeschlossene Körper  $K'$  mit  $K \subset K' \subset \bar{K}$  den Körper  $K^{(2)}$  enthält.
- (5) Bestimmen Sie für die folgenden Ringe  $R$  alle Ideale  $m$ , sodass  $R/m$  ein Körper ist. Wie viele Elemente hat  $R/m$  jeweils?
  - (a)  $\mathbb{Z}$
  - (b)  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$
  - (c)  $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$

### schriftliche Aufgaben:

- (1) (3 Punkte) Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung,  $a \in L$  und  $K(a)$  eine algebraische Körpererweiterung vom Grad 5. Zeigen Sie, dass  $K(a) = K(a^2)$  gilt.
- (2) (7 Punkte) Sei  $K := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  und  $f(x) = x^4 - 3$  ein Polynom in  $K[x]$ .
  - (a) Zeigen Sie, dass  $f$  irreduzibel ist.
  - (b) Finden Sie einen Erweiterungskörper  $L$  von  $K$  mit möglichst kleinem Grad, sodass  $f$  eine Nullstelle in  $L$  hat.
  - (c) Zeigen Sie, dass  $f$  als Polynom in  $L[x]$  in Linearfaktoren zerfällt.
  - (d) Wie viele Elemente hat  $L$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Bitte wenden**

**zur Diskussion:**

- (1) Ist jede algebraische Erweiterung endlich?
- (2) Gibt es unendlich viele irreduzible Polynome in  $\mathbb{Q}[x]$ ?
- (3) Gibt es einfache Erweiterungen über  $\mathbb{Q}$  in unendlich vielen Graden?
- (4) Ist der *rationale Funktionenkörper*

$$\mathbb{C}(x) := Q(\mathbb{C}[x]) := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x], g(x) \text{ ist nicht das Nullpolynom} \right\}$$

algebraisch abgeschlossen?

*Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 08.01.2019.*

*Alle Aufgabenblätter und ein Kurzschrift finden Sie auf der Webseite*

*<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html>*