Steffen König
Apolonia Gottwald

17.10.2019

Aufgabenblatt 1

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) Zeigen Sie die folgende Aussage:
Sei $f(x) = s^2x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + r^2 \in \mathbb{Z}[X]$ und $x_0 = \frac{r}{s}$ eine Lösung von $f(x) = 0$ und ein gekürzter Bruch.
Dann ist s ein Teiler von a_{n-1} und r ein Teiler von a_1.

(2) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = ax$ ist ein Ringhomomorphismus für alle $a \in \mathbb{Z}$.
(b) $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$, $f(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = a_1x + a_0$ ist ein Ringhomomorphismus.
(c) Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe mit einem Ringhomomorphismus $f : R \to S$. Dann gilt für alle $r \in R$ die Gleichung $f(-r) = -f(r)$.
(d) Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann gibt es zu jedem $r \in R$ entweder ein Element $s \in R$ mit $s \neq 0$ und $r \cdot s = 0$ oder ein Element r^{-1} mit $r \cdot r^{-1} = 1$.
(e) Sei $(R, +, \cdot)$ ein euklidischer Ring mit Gradfunktion λ. Dann gilt die Ungleichung $\lambda(r + s) \leq \lambda(r) + \lambda(s)$ für alle $r, s \in R$.

(3) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Elemente mit dem Euklidischen Algorithmus:
(a) 3315 und 34 in $\mathbb{Z}$.
(b) $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ und $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ in $\mathbb{R}[X]$.
(c) $x^4 - x^3 - x^2 - 5x - 30$ und $x^2 + 3x + 2$ in $\mathbb{R}[X]$.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(6 Punkte)* Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
(a) Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $a \in R$ invertierbar. Dann ist auch $(R, +, *)$ ein Ring, wobei die Verknüpfung $*$ durch $r * s = a \cdot r \cdot s$ definiert ist.
(b) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $r, s \in R$. Falls $r \neq 0$ und $r \cdot s = r$ ist, dann ist $s = 1$.

(2) *(4 Punkte)* Sei R ein Ring, S ein Integritätsbereich und f ein injektiver Ringhomomorphismus $f : R \to S$. Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist.
Gilt die Aussage auch dann, wenn f surjektiv, aber nicht injektiv ist? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Bitte wenden

zur Diskussion:

Welche der folgenden Mengen bilden mit der angegebenen Addition eine Gruppe? Welche der Mengen bilden Ringe mit der angegebenen Addition und Multiplikation? Welche der Ringe sind kommutativ? Welche sind Integritätsbereiche?

(1) $\mathbb{N}$ mit der Addition $m \oplus n = \min\{m, n\}$ und der üblichen Multiplikation,
(2) $\mathbb{Z}$ mit der Addition $m \oplus n = m + n + 2$ und der üblichen Multiplikation,
(3) $\mathbb{R}^3$ mit Vektoraddition und dem Kreuzprodukt, definiert durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix},$$

(4) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$D_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \subset Mat(n \times n, \mathbb{R})$$

der n-dimensionalen oberen Dreiecksmatrizen mit Matrixaddition und -multiplikation,

(5) Die Menge $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit Matrixaddition und -multiplikation,
(6) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der reellen Polynome vom Grad $< n$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation $f * g = r$, wobei r das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $< n$ ist, sodass ein Polynom q mit $f \cdot g = q \cdot x^n + r$ existiert.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 23.10.2019.

Die Übungen finden erstmals am Mittwoch, 23.10.2019 statt.

Alle Aufgabenblätter finden Sie auf der Webseite
https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iaz/iaz1/Koenig/WS19-20Algebra/Algebra.html