Algebra – Scheinklausur

Teil 1 *(22 Punkte.)*

1. *(3 Punkte.)* Bestimmen Sie in $\mathbb{Q}[x]$ den größten gemeinsamen Teiler von $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ und $g(x) = x^3 + 1$.

2. *(3 Punkte.)* Sei $G = D_8 = \langle r, s : r^4 = s^2 = e, srs = r^{-1} \rangle$ die Diedergruppe mit 8 Elementen und H die von der Drehung r erzeugte Untergruppe von G.

   H operiere durch Linksmultiplikation auf G. Bestimmen Sie Anzahl und Elementezahl der Bahnen unter dieser Operation.

3. *(4 Punkte.)* Bestimmen Sie die 3-Sylowuntergruppen von Σ_4.

4. *(4 Punkte.)* Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind:
   (a) $3x^4 + 15x^2 + 10$.
   (b) $x^2 + x + 2$.

5. *(8 Punkte.)* Betrachten Sie die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.
   (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{7}$ und einen Isomorphismus zwischen einem Quotientenring F von $\mathbb{Q}[x]$ und dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.
   (b) Geben Sie jeweils eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und von F als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ an.
   (c) Ist $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ normal?
   (d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ algebraisch abgeschlossen ist.

Teil 2 *(16 Punkte.)*

6. *(4 Punkte.)* Beweisen oder widerlegen Sie, dass alle Ideale in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ Hauptideale sind.

7. *(3 Punkte.)* Sei R ein kommutativer Ring und seien $I, J \lhd R$ Primideale. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

   $I \cap J$ ist ein Primideal oder das Nullideal.

8. *(3 Punkte.)* Seien R, S Ringe und $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie, dass der Kern von f ein Ideal in R ist.

9. *(4 Punkte.)* Sei $G = \Sigma_6$. Zeigen Sie, dass Σ_4 zu einer Untergruppe H von Σ_6 isomorph ist. Bestimmen Sie (mit Begründung Ihrer Rechnung) die Anzahl der Linksnebenklassen von H in G und die Anzahl der Rechtsnebenklassen von H in G.

10. *(2 Punkte.)* Geben Sie eine endliche Menge X und eine Gruppe $G \neq \{e\}$ an, die auf X ohne Fixpunkte operiert.

-Bitte auf diesem Blatt keine Lösungen eintragen-