UNIVERSITÄT STUTTGART

Prof. Dr. Steffen König

Algebra – Modulklausur am 26.05.2020

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Semester: ______________________

Studiengang: ____

UNTERSCHRIFT: ____

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Anzahl der abgegebenen Lösungsbögen: ______________________

Anmerkungen: ____

____

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine, außer Kugelschreiber oder Füller.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Geben Sie bitte auf jedem Lösungsbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an. Lösungsbögen ohne diese Daten werden nicht gewertet.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass die Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Viel Erfolg!

	1	2	3	4	5	6
Punkte						

Hinweis: Ringe haben immer ein Einselement und Ringhomomorphismen bilden definitionsgemäß Einselemente auf Einselemente ab.

1. *(5 Punkte.)*

   (a) Zeigen Sie, dass $f_1(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ und $f_2(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 2$ in $\mathbb{Z}[x]$ unzerlegbar sind.

   (b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $g_1(x) = x^4 - 6x^2 - 7x - 6$ und $g_2(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ in $\mathbb{Z}[x]$.

2. *(6 Punkte.)* Sei K der Körper mit drei Elementen und $R = K[x]$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

   (a) Das von $x + 1$ erzeugte Hauptideal ist ein Primideal in R.

   (b) Das von x^2 und $2x$ erzeugte Ideal ist ein Hauptideal.

   (c) Es gibt einen Ringhomomorphismus von R nach F, dem Körper mit fünf Elementen.

   (d) Die Menge $M = \{\sum_{i=0}^n a_i x^{2i} \in K[x] \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$ bildet eine additive Untergruppe von R, bezüglich derer es genau zwei Linksnebenklassen gibt.

3. *(4 Punkte.)* Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Für alle Ringe R und S und Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ und $\psi : \mathbb{Z} \to S$ gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\psi)$.

   (b) Für alle Ringe R und S und Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Q} \to R$ und $\psi : \mathbb{Q} \to S$ gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\psi)$.

   (c) Sei $K = \mathbb{F}_9$ der Körper mit neun Elementen. Dann ist für jeden Ring R jeder Ringhomomorphismus $\varphi : R \to K$ surjektiv.

4. *(8 Punkte.)* Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Sei $g \in G$. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{N}$: $g^a = g^b$ genau dann, wenn $\mathrm{ord}(g)$ die Zahl $a - b$ teilt.

   (b) Seien H_1 und H_2 Untergruppen von G. Wenn $G = H_1 \cup H_2$ gilt, ist eine der beiden Untergruppen schon G selbst.

   (c) Sei G endlich. Dann hat G genau dann eine Untergruppe H vom Index 2, wenn es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt.

5. *(10 Punkte.)* Sei $G = \{a \in \mathbb{C} \mid a^6 = 1\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass G mit der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine abelsche Gruppe bildet.

   (b) Bestimmen Sie alle Untergruppen H von G.
   Welche der Untergruppen sind Sylow-Untergruppen?

   (c) Definieren Sie eine fixpunktfreie Operation von G auf der Menge der Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und bestimmen Sie die Bahnen und die Stabilisatoren der Ecken unter dieser Operation.

   (d) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl n an, so dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe Σ_l ist für jedes $l \geq n$.

6. *(12 Punkte.)* Sei p eine Primzahl, a die reelle dritte Wurzel aus p und $L := \mathbb{Q}(a)$ die einfache Erweiterung über $\mathbb{Q}$.

   (a) Bestimmen Sie den Grad von L über $\mathbb{Q}$ und alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset L$. Welche K sind über $\mathbb{Q}$ normal?

   (b) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^3 - p$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie den Zerfällungskörper von $f(x)$ über $\mathbb{Q}$ durch Erweiterung von L zu $L(b)$ für ein b.

   (c) Bestimmen Sie den Grad von $L(b)$ über L und Basen von $L(b)$ über L und über $\mathbb{Q}$.

   (d) Begründen Sie, dass es eine komplexe Zahl c gibt, so dass $L(b) = \mathbb{Q}(c)$ ist.