Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Freitag, 09.02.2018
Aufgabenblatt 14

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen den Kern, die Dimension des Kernes, den Rang, die Gaußsche Normalform und, falls möglich, die inverse Matrix:

   (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 6, \mathbb{Q})$

   (ii) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}_7)$

   (iii) $C = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 1+i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$

2. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ gegeben ist durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie invertierbare Matrizen S und T in $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, sodass SAT in der Gaußschen Normalform ist. Finden Sie Basen $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ und $\mathcal{C}' = \{c'_1, c'_2, c'_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass T die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ und S die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}'$ ist. Berechnen Sie $\psi(c_j)$ für $1 \leq j \leq 3$.

3. Sei $\mathbb{C}[x]_n \subseteq \mathbb{C}[x]$ der $\mathbb{C}$-Unterraum aller Polynome in $\mathbb{C}[x]$ mit Grad höchstens n. Wir betrachten die Basis $\mathcal{C}_n = \{i, ix, \ldots, ix^n\}$ von $\mathbb{C}[x]_n$. Sei $\varphi : \mathbb{C}[x]_3 \longrightarrow \mathbb{C}[x]_2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\varphi(\sum_{j=0}^{3} a_j x^j)$ gleich

$$-2ia_0 - 4ia_1 + ia_2 + (-3ia_0 - 3ia_1 + 3ia_2 - ia_3)x + (-ia_0 - 5ia_1 - ia_2 - ia_3)x^2.$$

   Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von $\mathbb{C}[x]_3$, eine Basis $\mathcal{B}' := \{b'_1, b'_2, b'_3\}$ von $\mathbb{C}[x]_2$ und $l \in \{1, 2, 3\}$, sodass $\varphi(b_j) = b'_j$ für $1 \leq j \leq l$ und $\varphi(b_j) = 0$ für $l < j \leq 4$. Berechnen Sie auch die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{C}[x]_3}$ bezüglich $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{B}$ sowie die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{C}[x]_2}$ bezüglich $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}_2$.

4. Seien U und V Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes W.
   (i) Wir nehmen an, dass $U \cap V = \{0\}$. Zeigen Sie, dass aus der Gleichung $u + v = u' + v'$ mit $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ folgt, dass $u = u'$ und $v = v'$.

(ii) Wir nehmen an, dass aus der Gleichung $u+v=0$ mit $u \in U$ und $v \in V$ immer $u=0$ und $v=0$ folgt. Zeigen Sie, dass $U \cap V = \{0\}$.

(iii) Wir nehmen an, dass $W = U \oplus V$ und betrachten die Funktionen $\mu, \nu : W \longrightarrow W$ mit $\mu(u+v) = u$ und $\nu(u+v) = v$, wobei $u \in U$ und $v \in V$. Zeigen Sie, dass μ und ν wohldefinierte $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen sind. Zeigen Sie zudem, dass $\nu = \mathrm{id}_W - \mu$, $\mu^2 = \mu$, $\nu^2 = \nu$ und $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu = 0_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)}$. Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(\mu)$, $\mathrm{Im}(\nu)$, $\mathrm{Kern}(\mu)$ und $\mathrm{Kern}(\nu)$ und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Aufgabe 3 (iii) von Aufgabenblatt 11.

5. Seien U und V mit $U \subseteq V$ Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes W.

(i) Zeigen Sie, dass V/U ein Unterraum von W/U ist.

(ii) Sei $\overline{X}$ ein Unterrraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes W/U. Zeigen Sie, dass es einen Unterraum X von W mit $U \subseteq X$ gibt, sodass $\overline{X} = X/U$.

(iii) Wir betrachten die natürliche Abbildung $f : W/U \longrightarrow W/V$. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist und bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$. Sind die Vektorräume $(W/U)/(V/U)$ und W/V isomorph?

6. Sei W ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Unterraum U und sei $\mathcal{B}_U = \{w_1, \ldots, w_l\}$ eine Basis von U. Sei $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_l, w_{l+1}, \ldots w_n\}$ eine Basis von W, die $\mathcal{B}_U$ enthält. Sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$ mit $g(U) \subseteq U$, sodass die Einschränkung $g|_U$ von g eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung von U nach U ist.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_{W/U} := \{w_{l+1} + U, \ldots, w_n + U\}$ eine Basis von W/U ist und folgern Sie, dass $\dim(W/U) = \dim W - \dim U$.

(ii) Wir betrachten $g' : W/U \longrightarrow W/U$ gegeben durch $g'(w+U) := g(w) + U$. Zeigen Sie, dass g' eine wohldefinierte Abbildung ist, das heißt, dass $g'(w_1+U) = g'(w_2+U)$, wenn $w_1 + U = w_2 + U$. Folgern Sie auch, dass g' $\mathbb{K}$-linear ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die darstellende Matrix von g bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} {}_{\mathcal{B}_U}[g|_U]_{\mathcal{B}_U} & A_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times l} & {}_{\mathcal{B}_{W/U}}[g']_{\mathcal{B}_{W/U}} \end{pmatrix}$$

(iv) Wir betrachten einen Unterraum V von W mit $W = U \oplus V$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_V := \{w_{l+1}, \ldots w_n\}$ eine Basis von V ist. Wie sieht die darstellende Matrix von g bezüglich $\mathcal{B}$ aus, wenn $g(V) \subseteq V$ gilt?

(v) Sei nun $W := \mathbb{C}^4$ und sei $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ gegeben durch

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ix_1 + x_2, x_1 - (1+i)x_2, 2x_4, 0).$$

Finden Sie 2-dimensionale Unterrräume U und V von W, sodass $W = U \oplus V$, $g(U) \subseteq U$ und $g(V) \subseteq V$. Bestimmen Sie Basen $\mathcal{B}_U$ von U und $\mathcal{B}_V$ von V und berechnen Sie die darstellende Matrix von g bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V$.

Die Aufgaben dieses Übungsblattes orientieren sich an den Vorlesungsinhalten der letzten beiden Semesterwochen und sind zum Üben dieses Stoffes gedacht. Lösungen zu den Aufgaben können nicht mehr abgegeben oder korrigiert werden und sind selbstverständlich auch nicht mehr relevant für die Zulassung. Die Lösungen der ersten drei Aufgaben werden Ende Februar auf der Homepage bekannt gegeben:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718