Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 20.12.2017
Aufgabenblatt 9

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind.
   (i) $f : \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\phi) = \phi(1)$.
   (ii) $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ mit $f(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)x^{k-2}$.
   (iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ mit $f(x) = 2^x$. Hier betrachten wir $]0, +\infty[$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der Operationen von Blatt 6 Aufgabe 3(iii).
2. Gegeben ist die Menge $\mathcal{B} := \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.
   (ii) $(*)$ Ergänzen Sie die linear unabhängigen Vektoren $(1,1,1,1)$ und $(1,0,0,1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, indem Sie Vektoren der Menge $\mathcal{B}$ hinzufügen.
   (iii) $(*)$ Sei $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung gegeben durch $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass auch die Vektoren in $g(\mathcal{B})$ linear unabhängig sind. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ des $\mathbb{R}^6$, die $g(\mathcal{B})$ enthält.
   (iv) $(*)$ Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{E}_n := \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von g zunächst bezüglich der Basen $\mathcal{E}_4$ und $\mathcal{E}_6$, danach bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}_6$ und schließlich bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.
3. Gegeben sind $W := \{(a, b, 0, a) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ und $W' := \{(a, b, c, b) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}^4$.
   (i) Zeigen Sie, dass W und W' Unterräume des $\mathbb{Q}^4$ sind. Bestimmen Sie die Menge $W \cap W'$ und finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $W \cap W'$.
   (ii) Bestimmen Sie auch Basen $\mathcal{C}$ von W und $\mathcal{C}'$ von W', die $\mathcal{B}$ enthalten.
   (iii) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ eine Basis von $W + W'$ ist.
   (iv) Seien W und W' nun beliebige endlich dimensionale Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $W \cap W'$ und seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Basen von W und W', die $\mathcal{B}$ enthalten. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ eine Basis von $W + W'$ ist und folgern Sie, dass $\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$.
4. Gegeben sind die Unterräume $V_k := \{p \in \mathbb{C}[x] \mid \mathrm{grad}(p) \leq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit Basis $\mathcal{B}_k := \{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$. Wir definieren $\mathrm{grad}(0_{\mathbb{C}[x]}) := -\infty < 0$. Seien $f : V_3 \longrightarrow V_2$ und $g : V_3 \longrightarrow V_3$ die Abbildungen, die $\sum_{k=0}^{3} z_k x^k$ auf $\sum_{k=1}^{3} k z_k x^{k-1}$ abbilden.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass f und g $\mathbb{C}$-linear sind. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}_3$ und $\mathcal{B}_2$ und von $g \circ g$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_3$.
   (ii) Wir betrachten $\mathbb{C}[x]$ nun als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\{1, i, x, ix\}$ eine Basis des reellen Unterraums V_1 ist. Finden Sie auch Basen $\mathcal{C}_k$ der reellen Unterräume V_k und bestimmen Sie die darstellende Matrix der Abbildung f bezüglich der Basen $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{C}_2$ und der Abbildung g bezüglich der Basis $\mathcal{C}_3$.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 9./10.01.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718

Weihnachtsspecial

Die folgenden Aufgaben sind freiwillig. Eine schriftliche Ausarbeitung kann in der Übungsgruppe am 9./10.01.2018 abgegeben werden. Die Aufgaben werden nicht in den Gruppen besprochen. Die erreichten Punkte werden als Bonuspunkte gewertet.

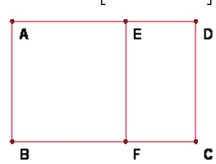
1. (2 Punkte) Ein Helfer des Weihnachtsmannes wurde ermordet. Das Verbrechen fand im Haus des Weihnachtsmannes statt. Die Polizei hat die folgenden Informationen:
   (a) Wenn der Weihnachtsmann nicht schuldig ist, war der Tatort die Küche oder das Wohnzimmer.
   (b) Wenn das Rentier Rudolf unschuldig ist, dann war die Waffe ein Revolver.
   (c) Mindestens einer dieser Hinweise gilt: Das Verbrechen hat um Mitternacht stattgefunden; die Waffe war kein Kerzenständer; der Tatort war das Badezimmer.
   (d) Der Tatort war das Badezimmer oder die Waffe war ein Kerzenständer.
   (e) Genau eine Person ist schuldig und genau eine Waffe wurde benutzt.

   Lösen Sie den Fall in jedem der folgenden Fälle (Mörder, Waffe, Ort, Zeit).
   (i) Das Polizeilabor bestätigt, dass der Tatort das Wohnzimmer war.
   (ii) Das Polizeilabor bestätigt, dass das Verbrechen am Mittag stattgefunden hat.

2. (2 Punkte) Beim weihnachtlichen Mittagessen mit Rentier Rudolf um 12:30 Uhr fällt dem Weihnachtsmann ein, dass er den Weihnachtselfen vor 10 Minuten versprochen hatte, alle Geschenke auf seinen Schlitten zu laden, bis die beiden Zeiger der Wanduhr sich zum nächsten Mal treffen. Es ist eine hübsche Uhr mit römischen Ziffern von I bis XII und sich stetig bewegenden Zeigern. Wieviel Zeit bleibt dem Weihnachtsmann noch, diese Aufgabe zu erledigen? Bitte runden Sie Ihr Ergebnis auf Sekunden.

3. (3 Punkte) Sei $U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \; \forall n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
   (i) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ist.
   (ii) Sei $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung, die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ auf den Vektor $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ abbildet. Zeigen Sie, dass ϕ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist und bestimmen Sie eine Basis von U.

4. (3 Punkte) Wir betrachten ein Rechteck $[ABCD]$

   mit $\overline{AB} < \overline{BC}$ und ein Quadrat $[ABFE]$, sodass die Rechtecke $[ABCD]$ und $[EFCD]$ kongruent sind, d.h. $\overline{BC}/\overline{AB} = \overline{EF}/\overline{ED}$. Die Zahl $\varphi := \overline{BC}/\overline{AB}$ wird als *goldener Schnitt* bezeichnet.
   (i) Zeigen Sie, dass $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Folgern Sie, dass φ eine Nullstelle des Polynoms $x^2 - x - 1$ ist. Bestimmen Sie auch die zweite reelle Nullstelle ψ dieses Polynoms.
   (ii) Wir betracheten die Folgen $g := (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $h := (\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass g und h zwei linear unabhängige Vektoren der Menge U sind, die in Aufgabe 2 definiert wurde. Ist $\{g, h\}$ eine Basis von U?
   (iii) Schreiben Sie die Fibonacci-Folge $f \in U$ als Linearkombination von g und h.