Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 06.12.2017
Aufgabenblatt 7

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Seien W_1, W_2 und U Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass $W_1 \cup W_2$ ein Unterraum von V ist genau dann, wenn gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.
   (ii) $(*)$ Seien $v_1 \in W_1 \setminus \{0\}$ und $v_2 \in W_2 \setminus \{0\}$. Wir nehmen an, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Zeigen Sie, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind.
   (iii) $(*)$ Wir definieren die Menge $W_1 + W_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1 \wedge v_2 \in W_2\}$. Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ ein Unterraum von V ist.
   (iv) Zeigen Sie, dass $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$. Gilt auch die Umkehrung $U \cap (W_1 + W_2) \subseteq (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$?

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) $W = \{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbb{Q} \wedge z \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$.
   (ii) $(*)$ $W = \{f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid f(n) \leq f(n+1)\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
   (iii) $(*)$ $W = \{p \in \mathbb{Q}[x] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 3\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[x]$.
   (iv) $W = \{[0], x + [1], x^2 + [1], x^2 + x\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{Z}_2$-Vektorraums $\mathbb{Z}_2[x]$.

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) $(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
   (ii) $([1], [0], [1]), ([1], [1], [0]), ([0], [1], [1])$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$.
   (iii) $1 + i$ und $2 - i$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
   (iv) $1 + i$ und $2 - i$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

4. Sei $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f \neq 0$. Nehmen Sie an, dass $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) $f(0) = 0$
   (ii) $f(1) = 1$
   (iii) $\forall x \in \mathbb{N}_0 : f(x) = x$
   (iv) $\forall x \in \mathbb{Z} : f(x) = x$
   (v) $\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = x$
   (vi) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$
   (vii) $\forall x \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
   (viii) $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

   (Hinweis zu (viii): Sie dürfen verwenden, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 12./13.12.2017. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718

Ankündigung: Die erste Scheinklausur findet am Samstag, den 9.12.2017, zwischen 9 und 10:30 Uhr statt. Die Zuteilung der Räume richtet sich nach der Nummer Ihrer Übungsgruppe. Studierende der Gruppen 1,4,5 und 6 schreiben in Raum V 53.01, Studierende der Gruppen 2 und 3 in Raum V 57.01 und Studierende der Gruppen 7 und 8 in Raum V 57.03.